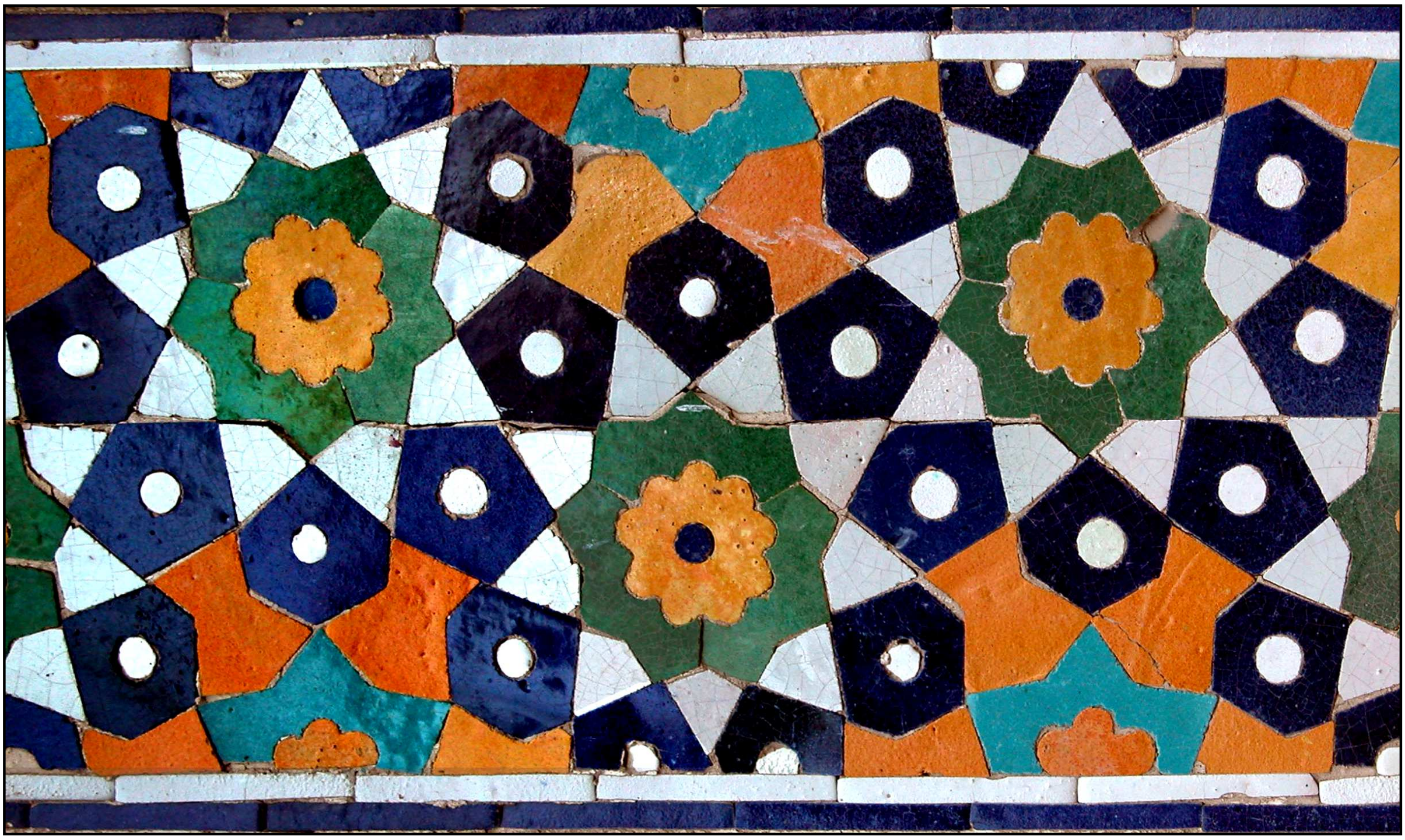
La géométrie des Arabesques

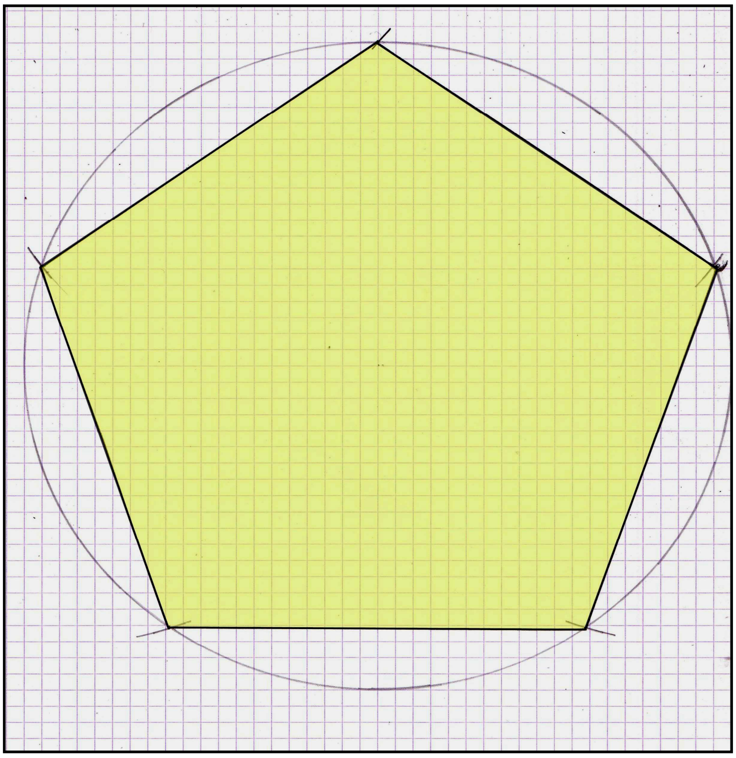


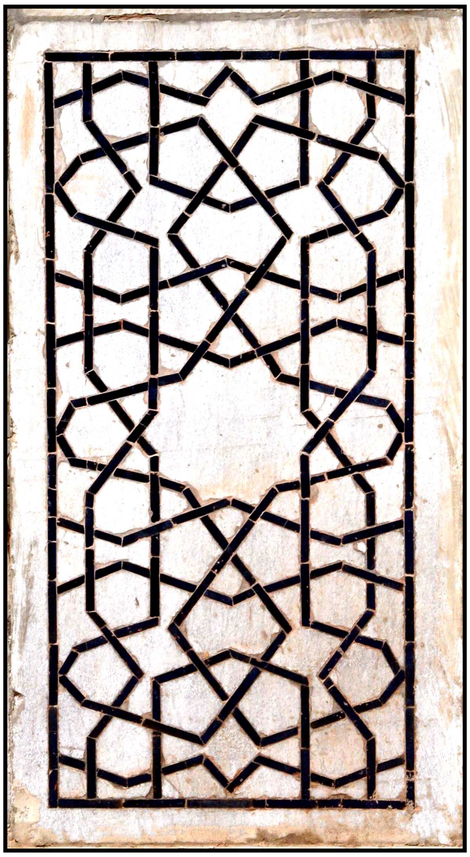
IX. DESSIN : SYTEME CONVERGENT PERSAN

Le nombre et le type des pentagones déterminent la forme du module.

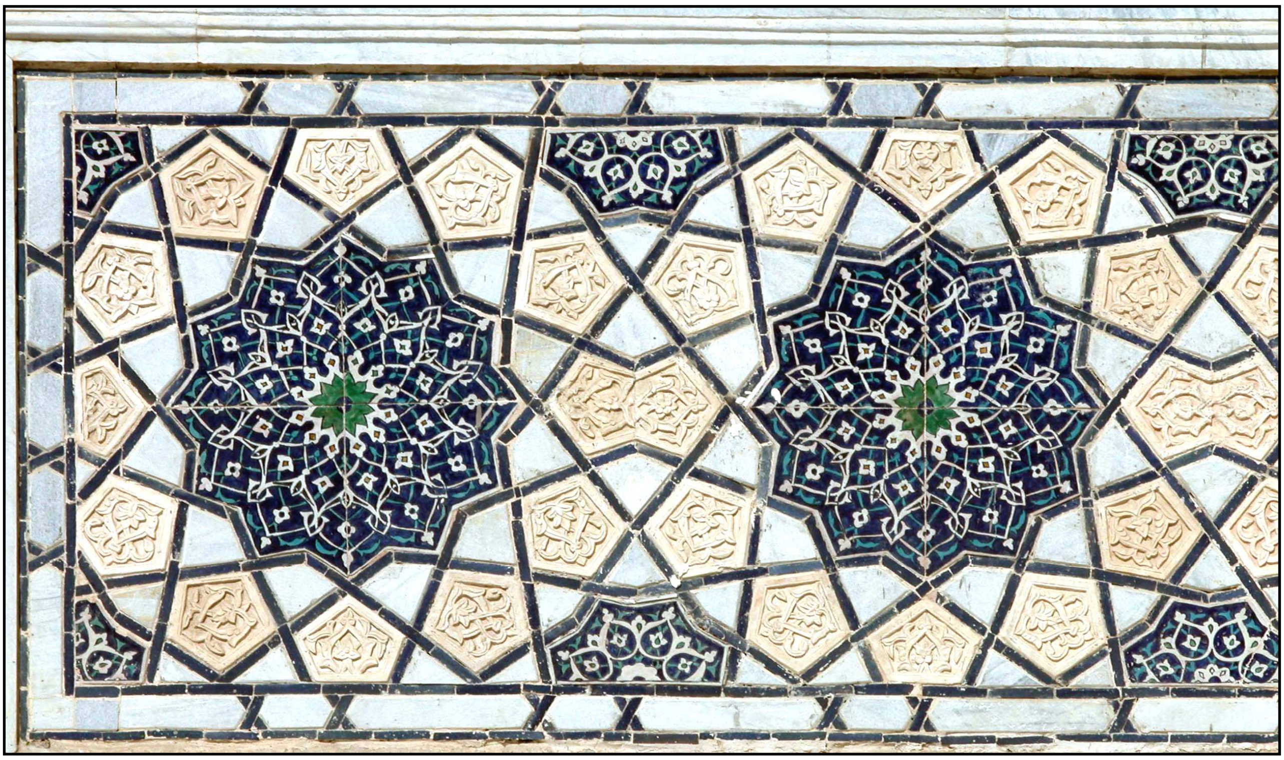
- Les couronnes de pentagones satellites ; le pentagone convexe :

Dix pentagones convexes forment une couronne et c'est l'extension de leurs cotés qui forme l'étoile à dix branches centrale.



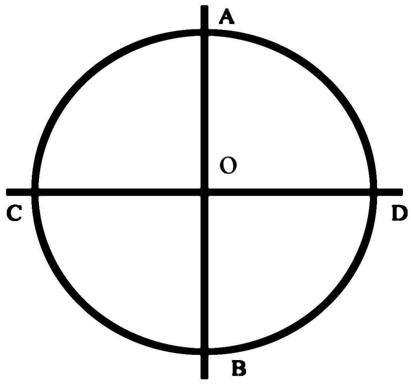


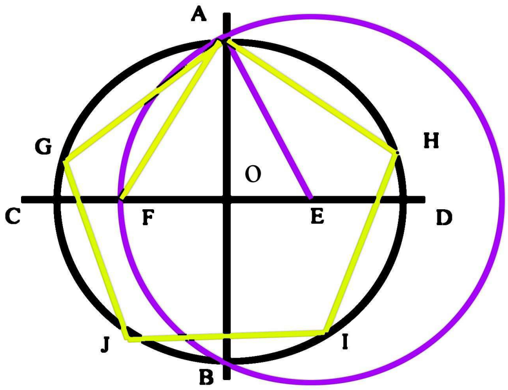
Médersa Oulough Begh à Samarcande.



- Construction du pentagone convexe :

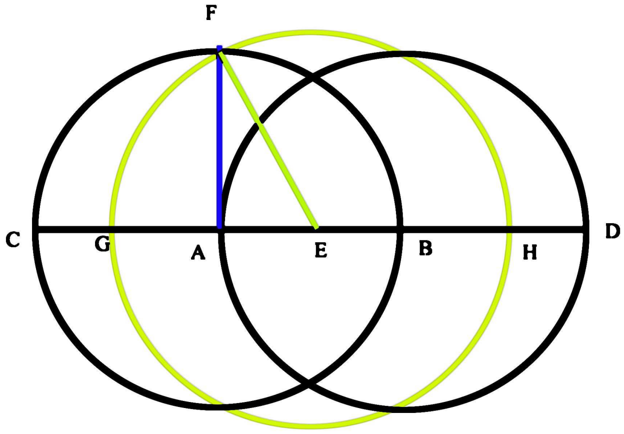
Connaissant le diamètre de son cercle circonscrit.

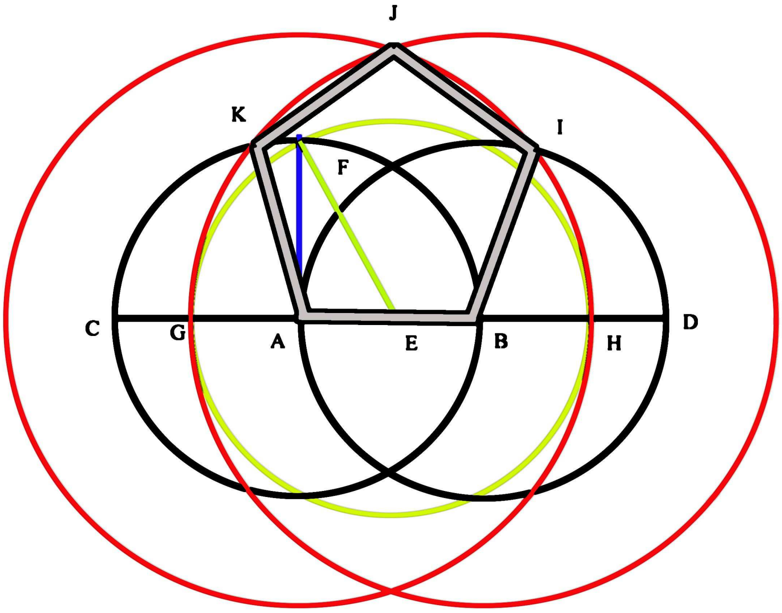




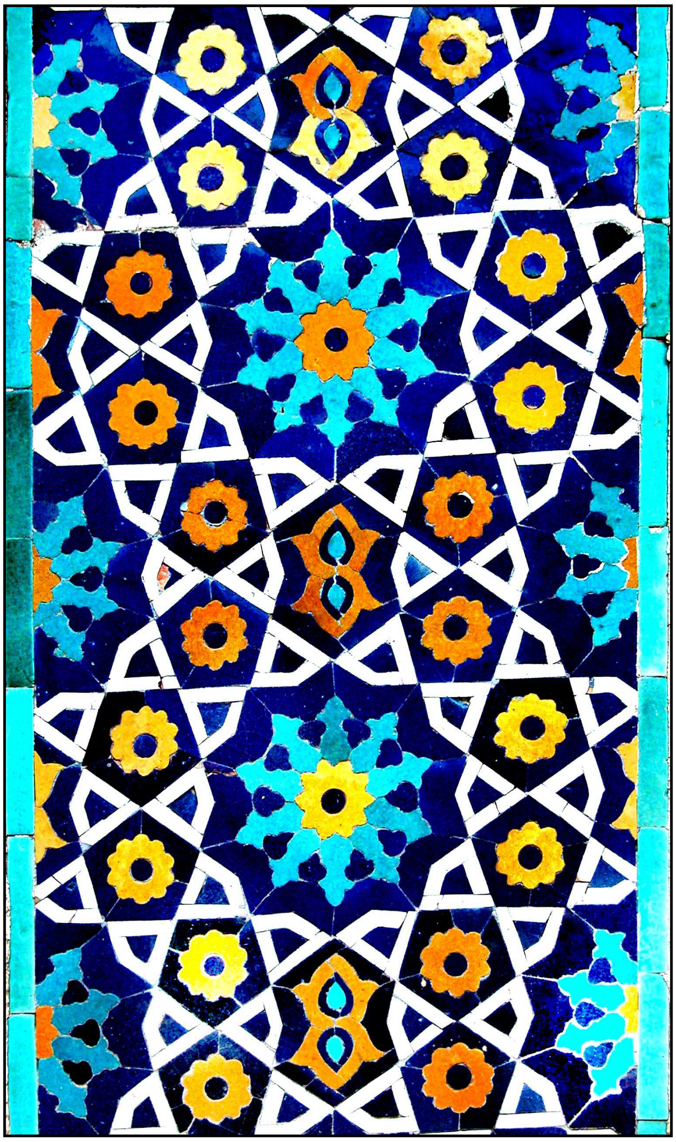
- construire les deux diamètres AB et CD.
- E est le milieu de OD ; construire le cercle de diamètre EA (bleu) qui coupe CD en F.
- La longueur de AF est égale au coté du pentagone, il suffit de reporter cette longueur sur le cercle pour définir le pentagone AHIJG

Connaissant la longueur de son côté.

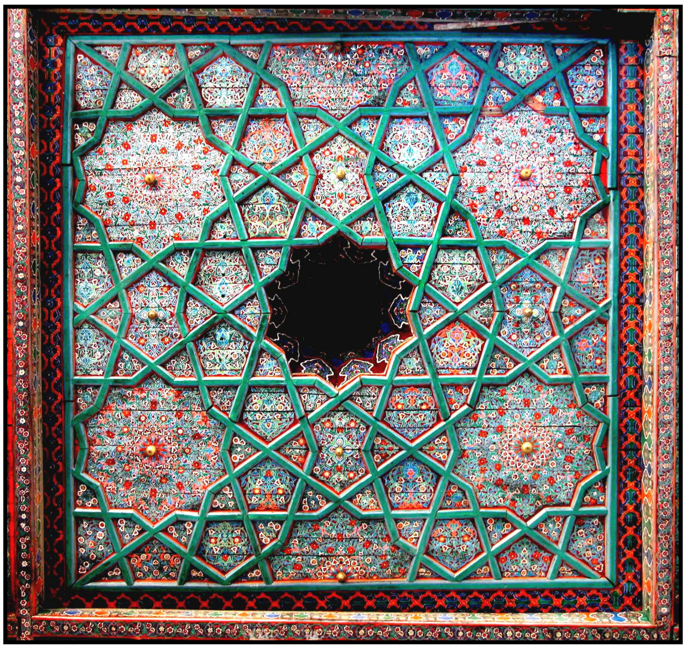


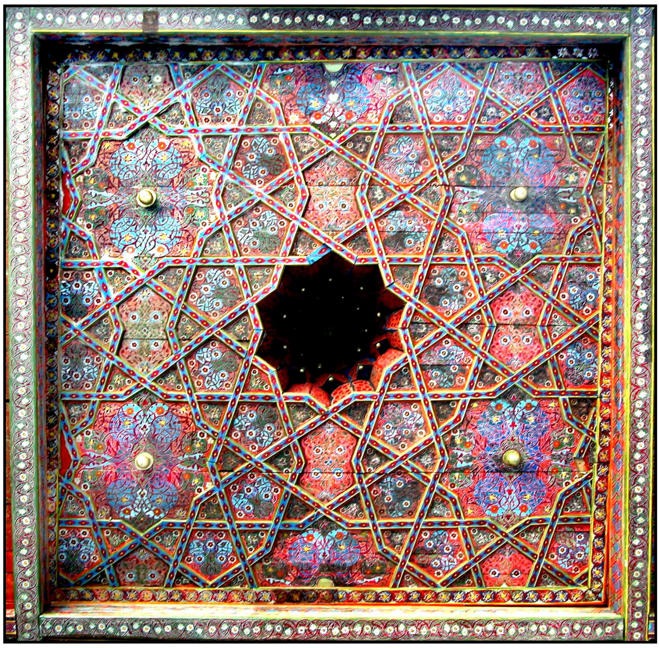


- AB est le coté connu du pentagone ; construire les deux cercles de diamètre AB centrés en A et en B.
- en A, construire la perpendiculaire à AB qui coupe le cercle précédent en F.
- construire le cercle de diamètre EF (jaune) qui coupe CD en G et H.
- les cercles rouges centrés en A et B de diamètre AH et BG coupent respectivement les deux cercles noirs en I et K et se coupent en J.
- JIBAK est le pentagone cherché de côté AB.



Couronnes de dix pentagones convexes : au-dessus, panneau du harem de Khiva ; à droite panneau du chortak de la médersa Oulough Begh à Boukhara.

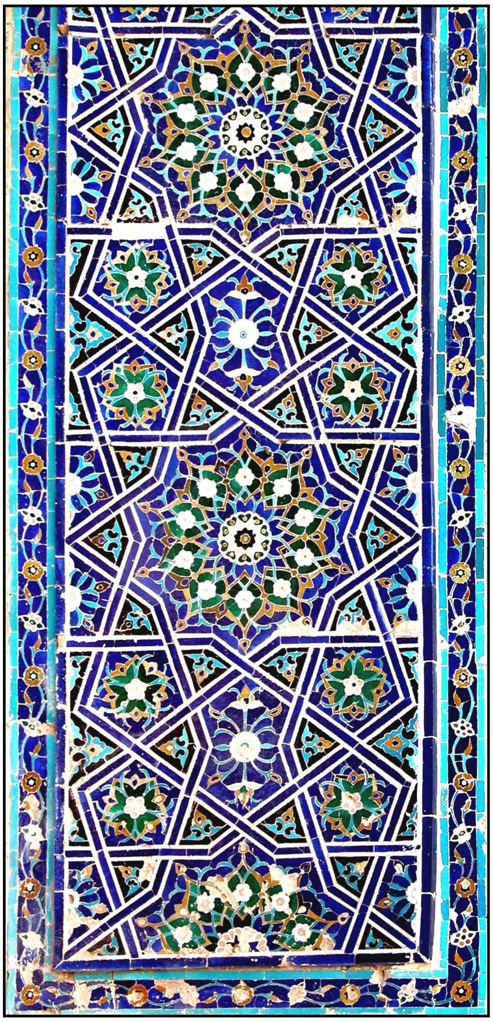




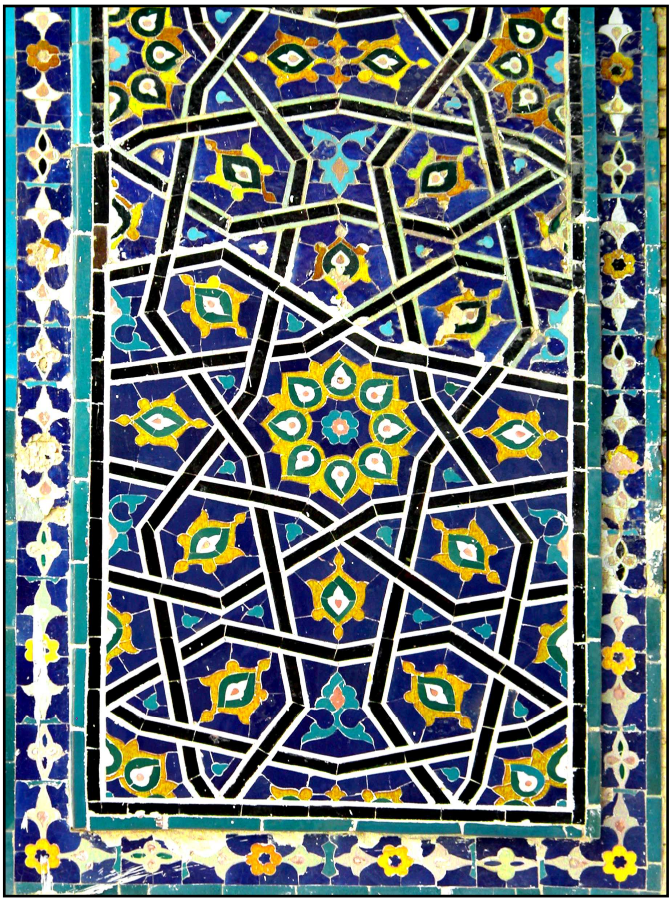
Caissons du plafond de la mosquée Bolo-Khaouz à Boukhara : composition de décagones formés par dix pentagones convexes.

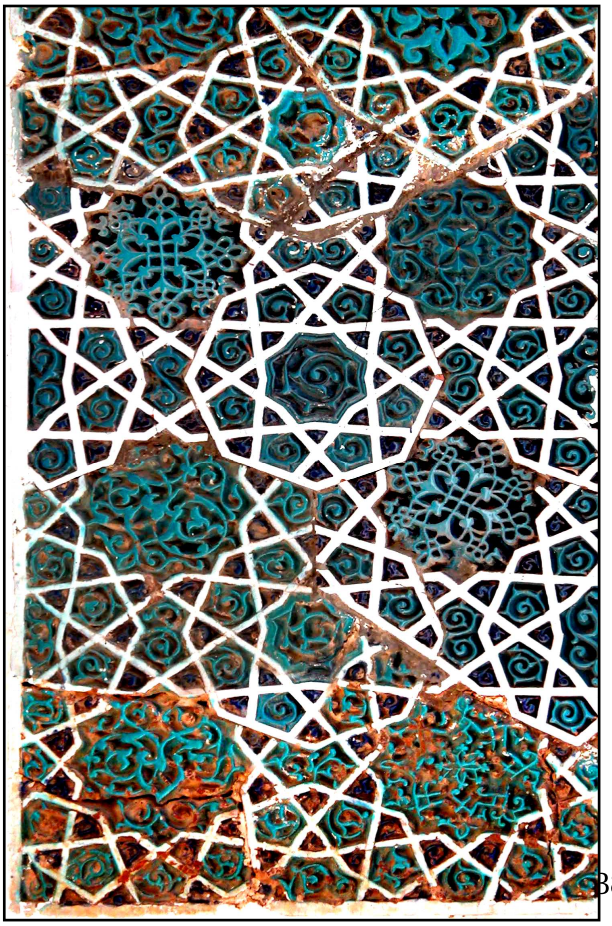
Les étoiles sont formées par douze pentagones convexes. Alfiz de l’entrée de Shah-I-Zinda à Samarcande.

Alfiz de la mosquée Amir Alim khan à Boukhara.



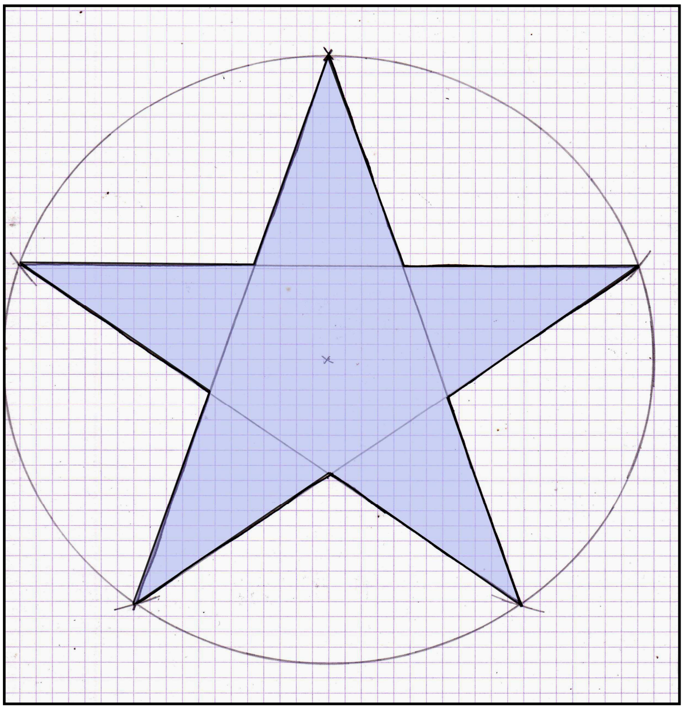
Quelques étoiles à dix de Shah-I-Zinda.

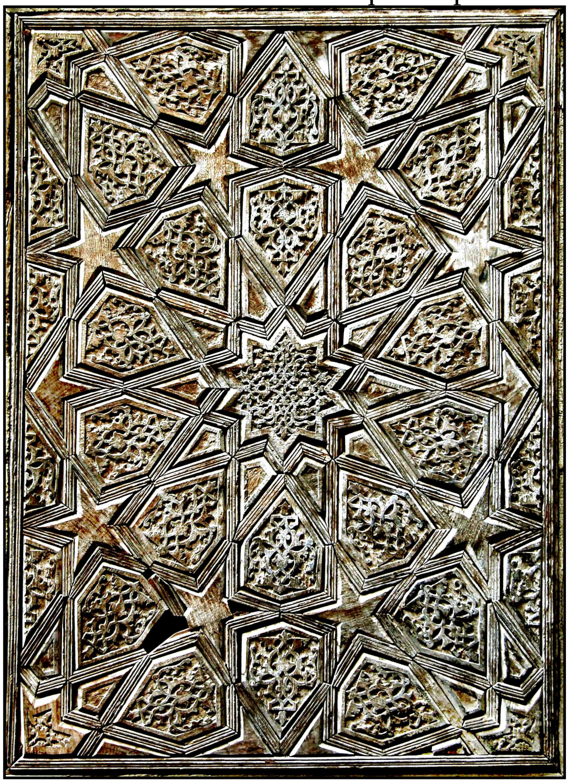




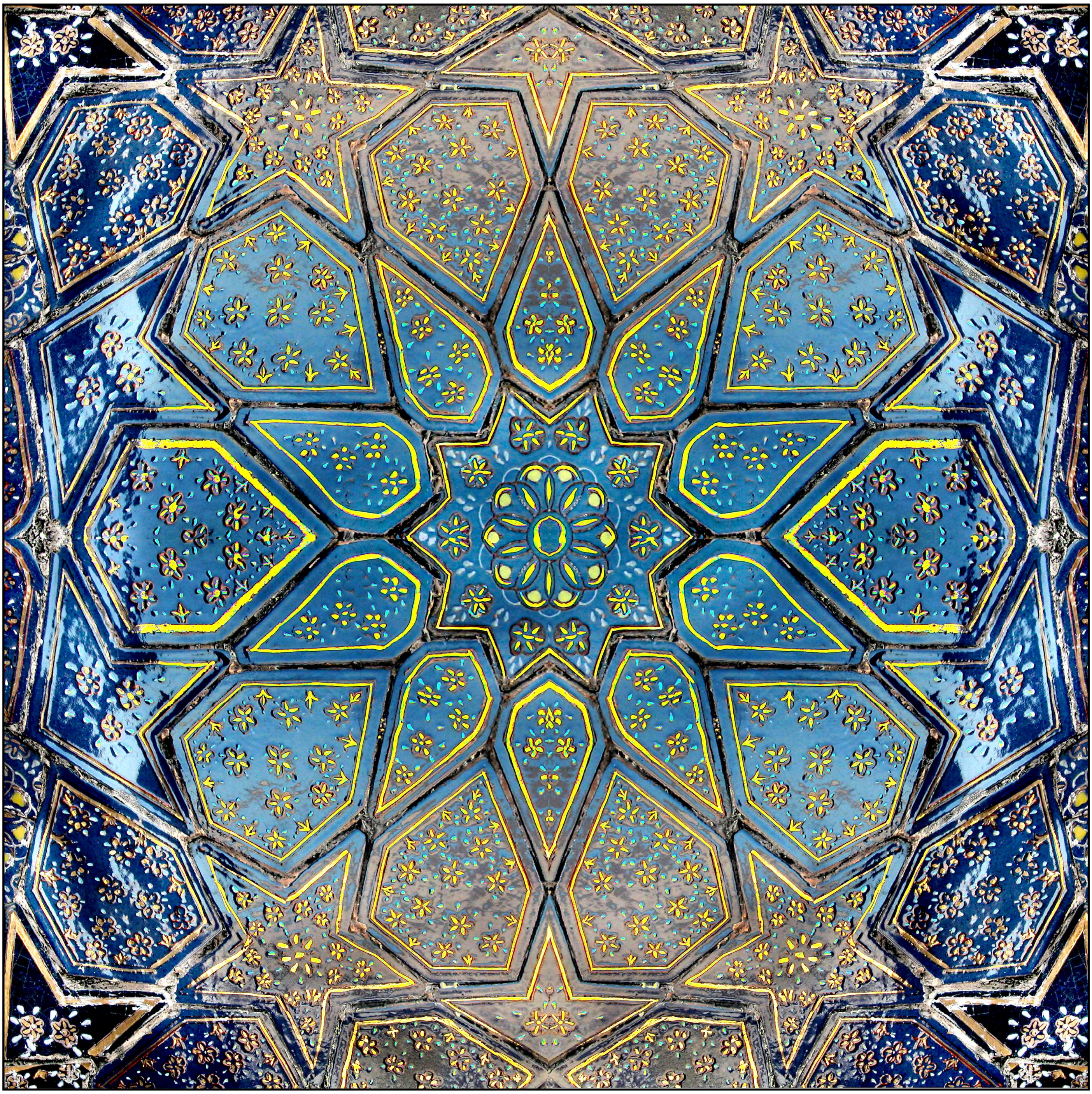
- Les couronnes de pentagones satellites ; pentagones étoilés

Au dessous, l'extension des cotés des pentagones forme l'étoile centrale ainsi que la pièce intermédiaire.

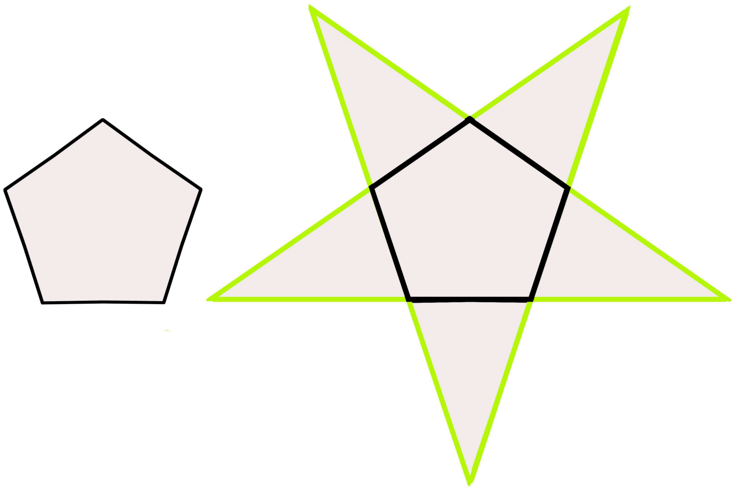




Alfiz et porte de bois de la médersa Oulough Begh à Boukhara.

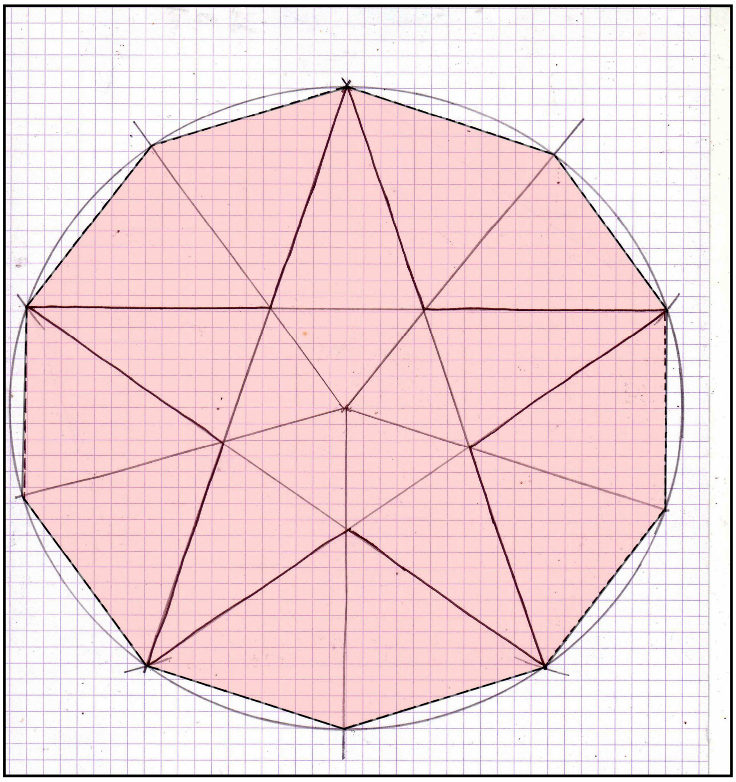


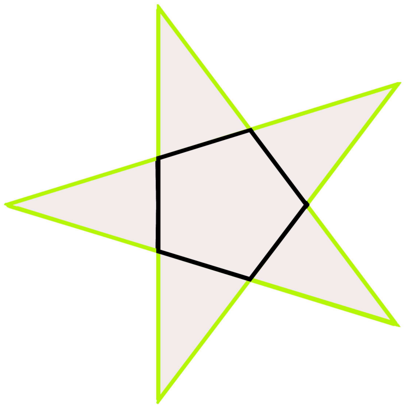
Décagone doré formé par une couronne de pentagones étoilés à Shah-I-Zinda.

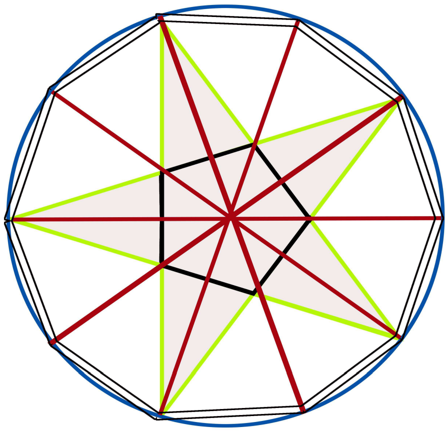


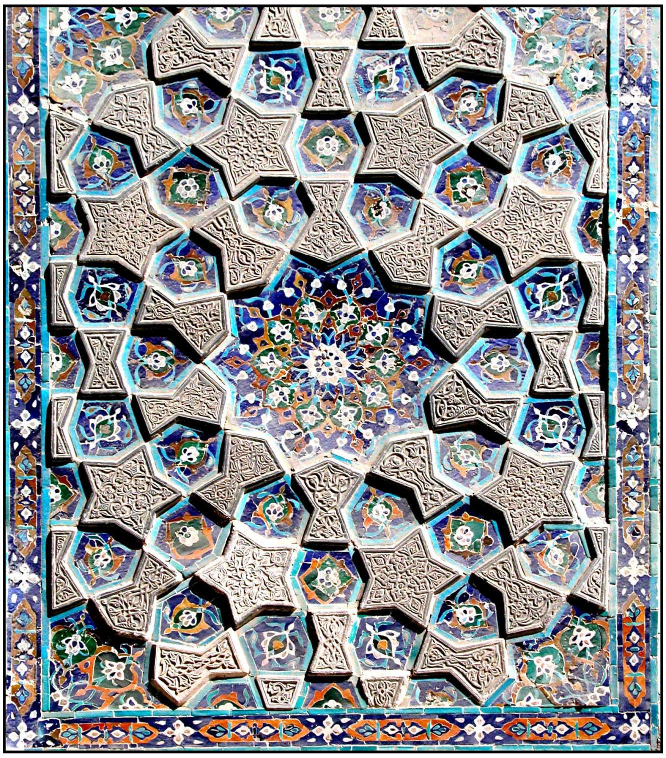
Le pentagone convexe ayant été construit comme précédemment, l’extension de ses côtés forme le pentagone étoilé.

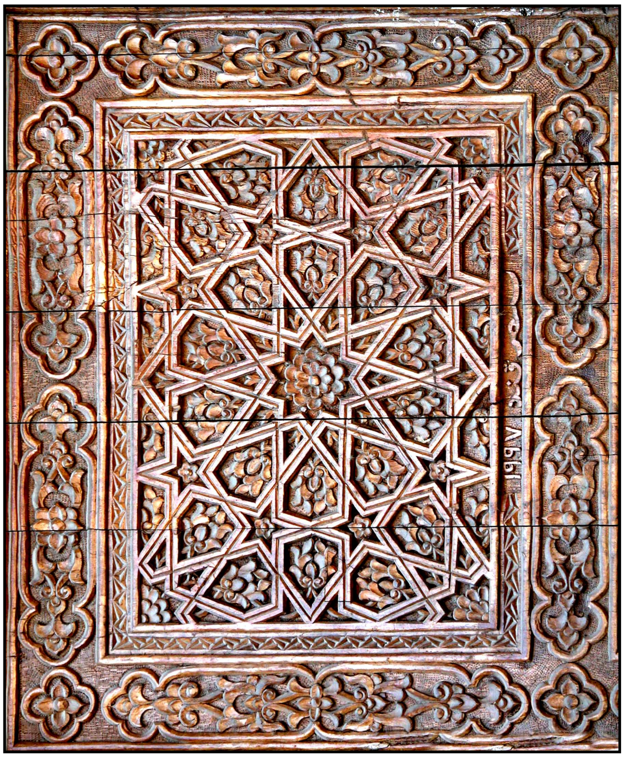
Le décagone est obtenu à partir du tracé du pentagone étoilé et de son cercle circonscrit ; si le rayon du cercle circonscrit est égal à 1, la mesure du côté du décagone est alors égale au petit nombre d'or.









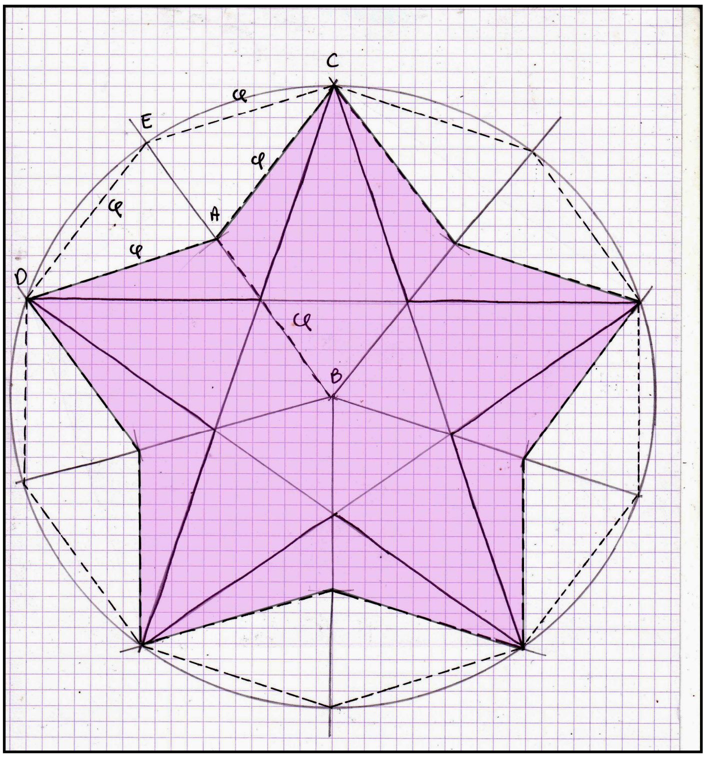


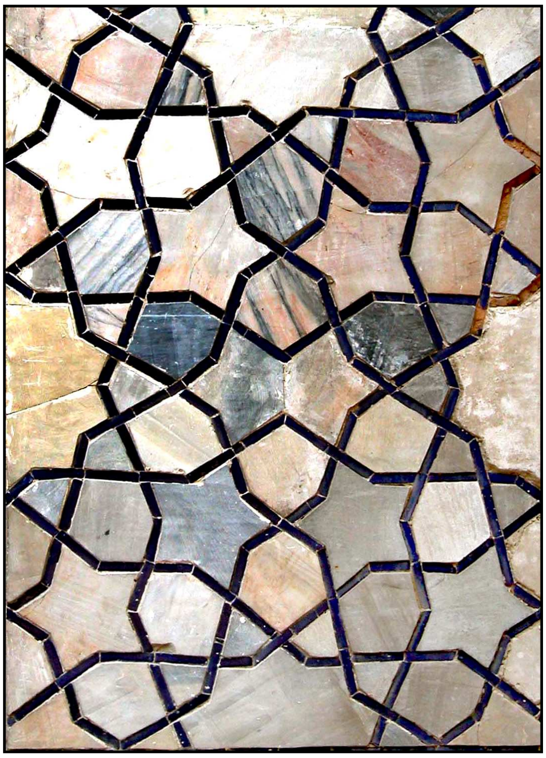
Médersa Oulough Begh à Samarcande.

Porte de la mosquée Kalon à Boukhara.

- Pentagones satellites ; le pentagone d'or :

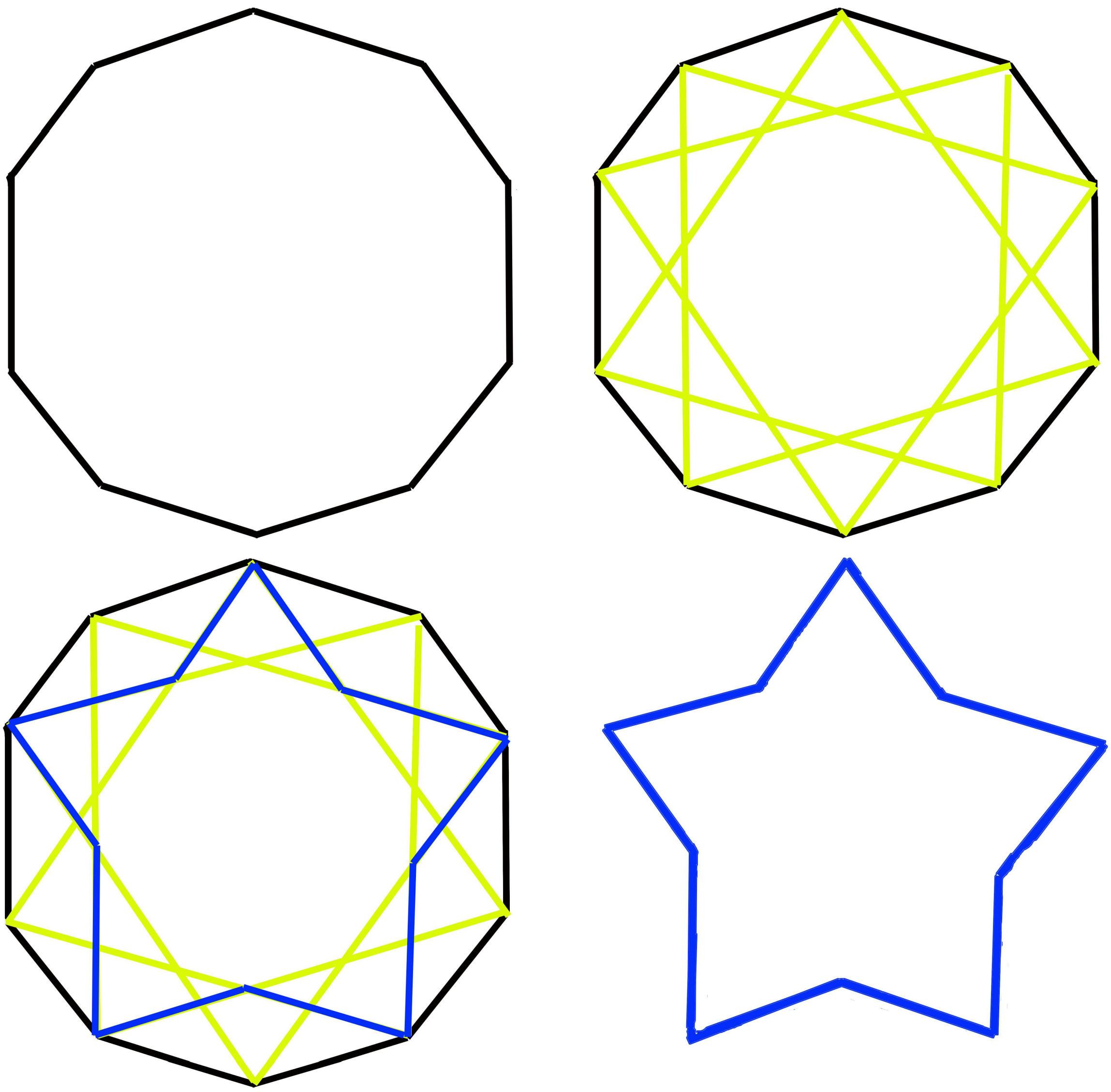
Le ***pentagone d'or*** présent dans la plupart des étoiles persanes est construit à partir du décagone de telle manière que AB = AC = AD = AE = EC = **Nombre d'or**. Ses côtés sont parallèles deux à deux.

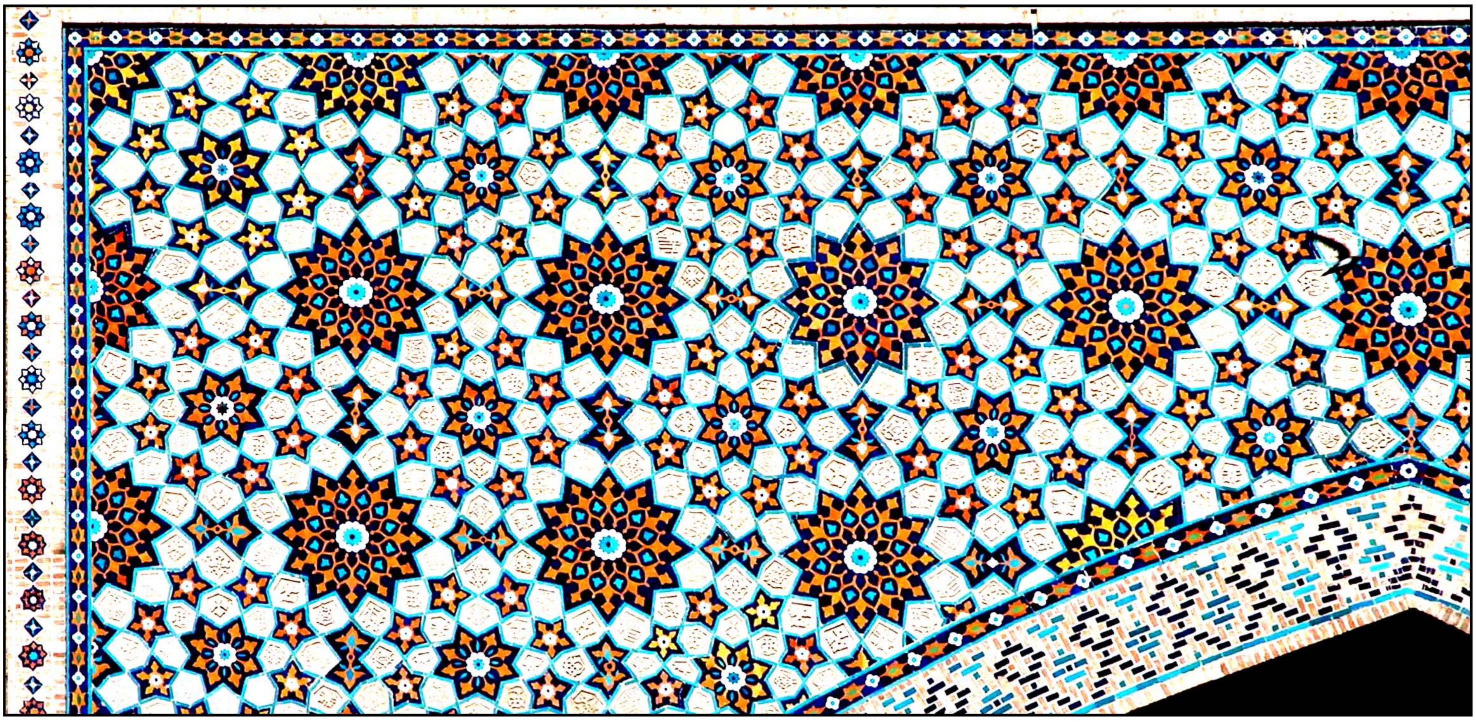




Dix pentagones d'or forment des décagones à la mosquée Bibi Kanun de Samarcande.

Construction du pentagone d’or à partir du décagone.



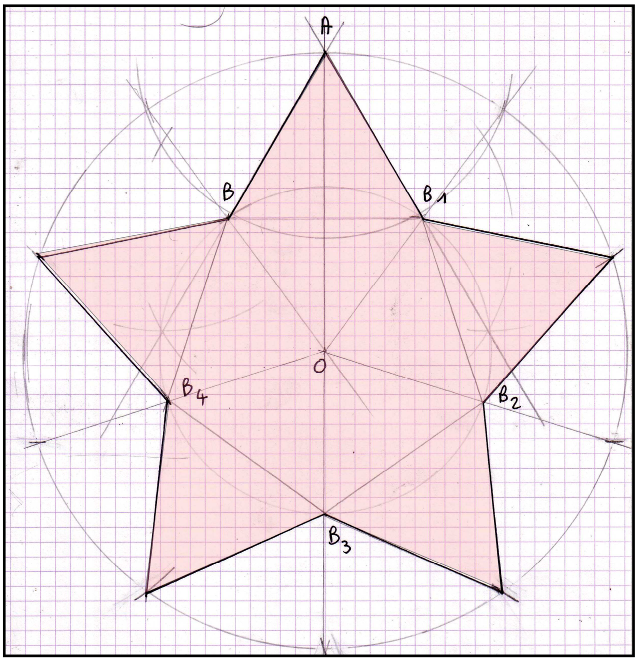


Alfiz de l’iwan intérieur dont chaque étoile est formée par une couronne de pentagones d’or.
Mosquée Bibi Kanun à Samarcande.

Panneau du chortak d’entrée de la médersa Oulough Begh à Samarcande.

Le **chortak**, du persan **tchahar tag** (quatre piliers) est l’élément de base des entrées des mosquées et des médersas de style persan. Ancien temple du feu des Sassanides zoroastriens, cette construction a supplanté le **Talar** des anciens Turcs.

- Pentagones satellites : le pentagone équilatère :



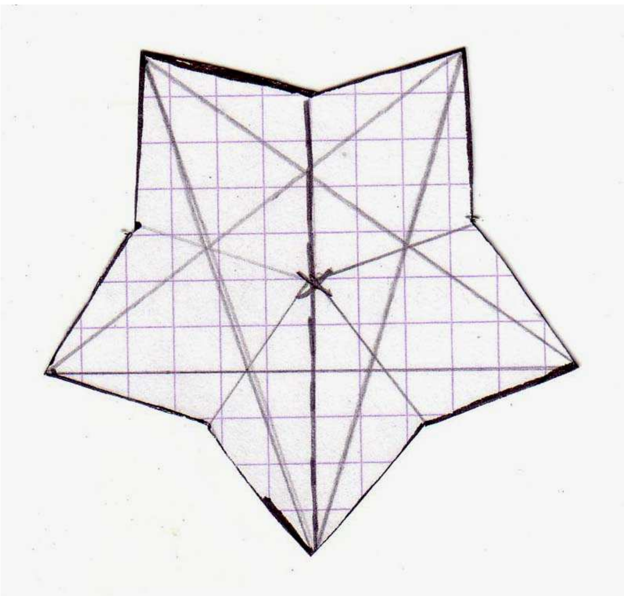
Le **pentagone équilatère** utilisé fréquemment comme satellite en Asie centrale est formé d'un pentagone convexe régulier B,B1,B2,B3,B4 autour duquel gravitent cinq triangles équilatéraux.

- Construction du pentagone convexe de centre O.
- Construction de ses dix demi-axes de symétrie.
- Aux points B et B1 construction de deux angles de 60° dont les côtés se coupent en A.
- Construction du cercle de rayon OA.
- Les points d'intersection des axes de symétrie avec ce cercle déterminent les sommets du pentagone équilatère.

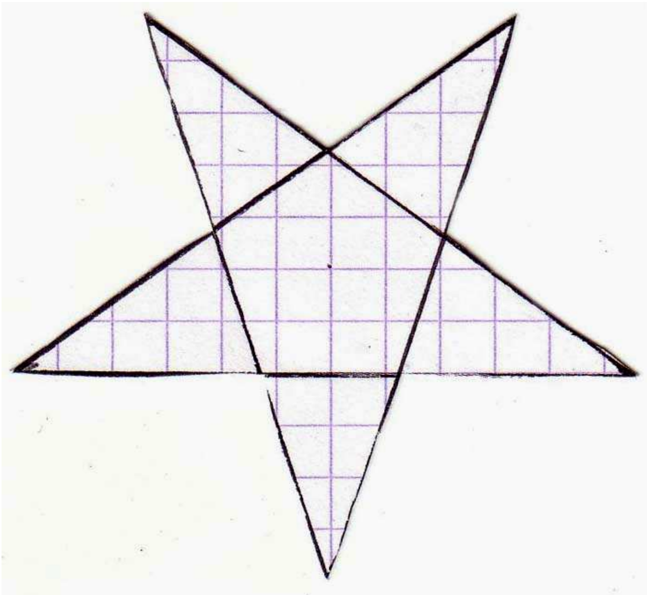
- Construction des étoiles de style persan.

Pour ce type de construction:

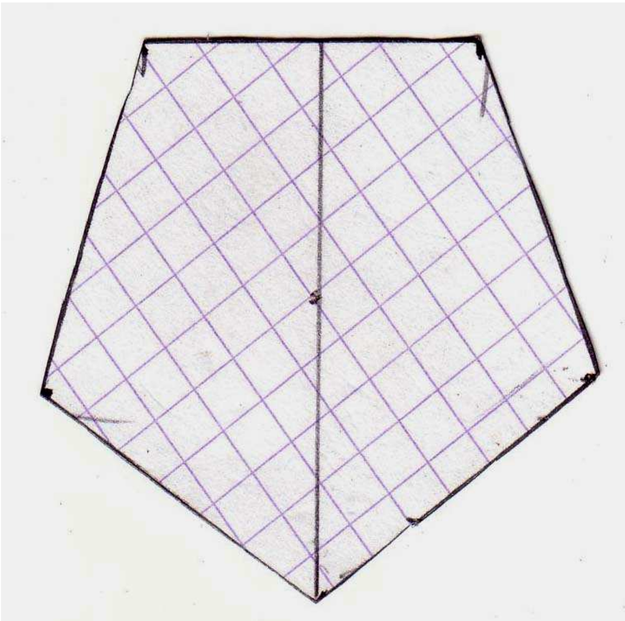
- Placer le centre de toutes les étoiles.
- Construire les axes de symétrie.
- Placer et centrer chaque pentagone sur chaque demi-axe.



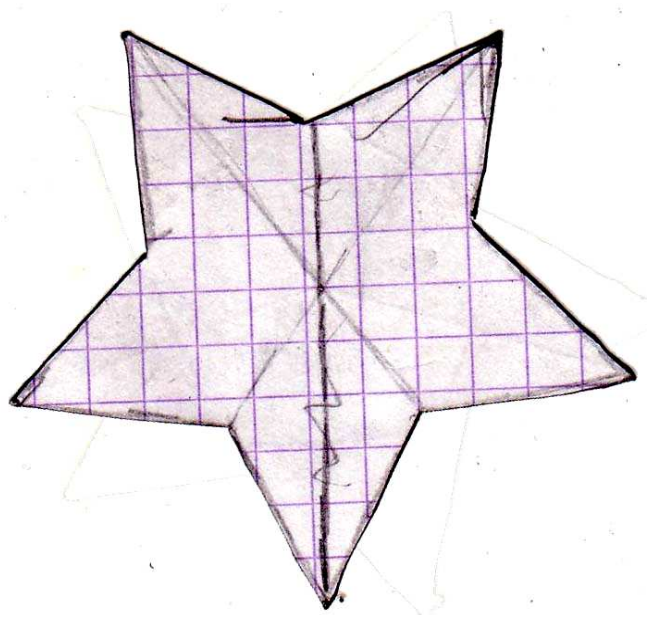
Pentagone d’or.



Pentagone convexe étoilé.



Pentagone concave.

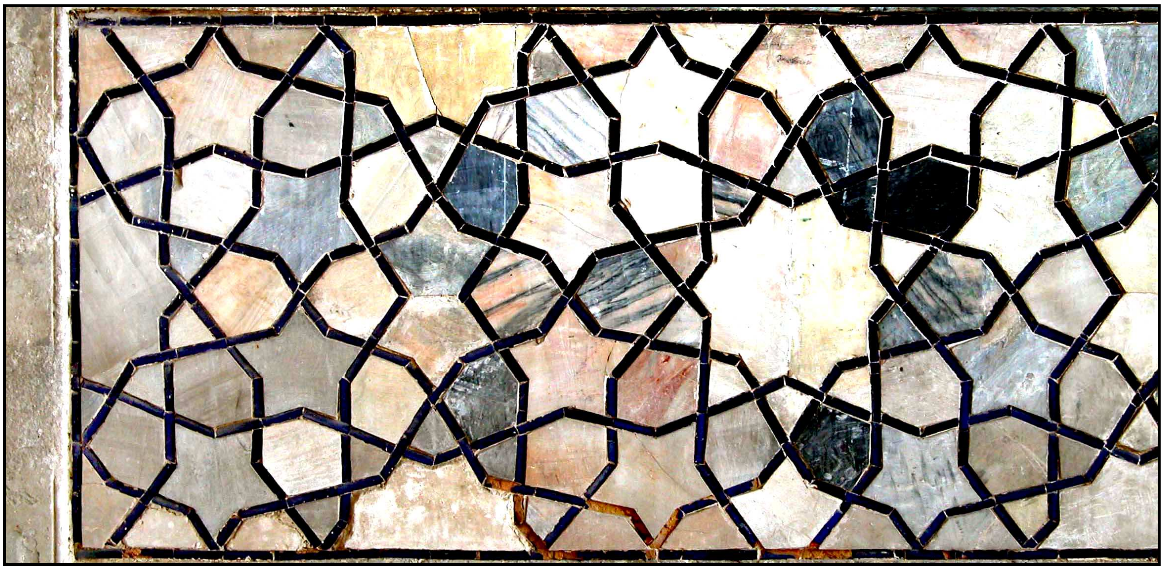


Pentagone équilatère.

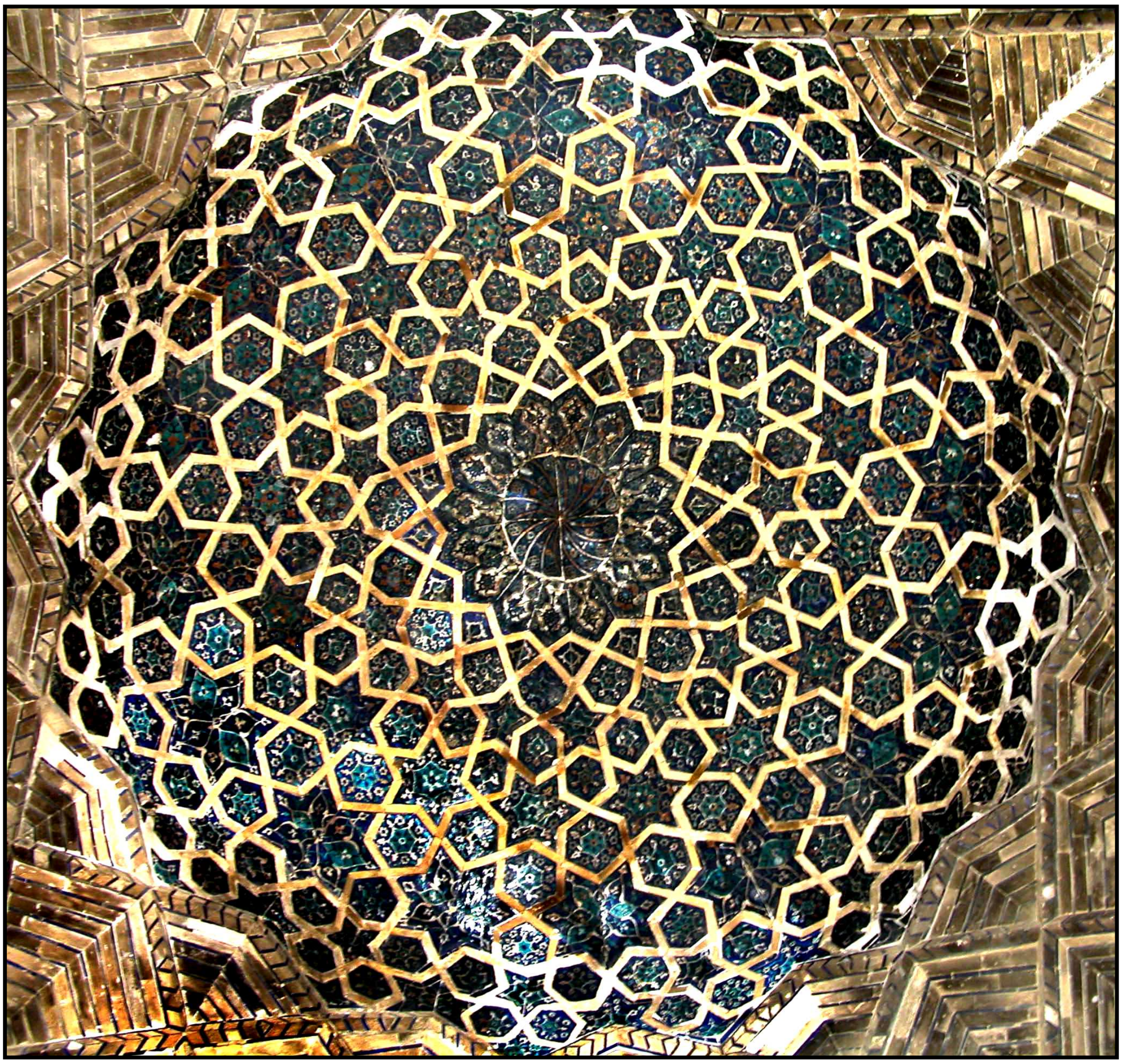
Afin d’éviter des tracés fastidieux, l’utilisation de gabarits permet de tracer les différents pentagones satellites.

La taille des gabarits dépend de celle du module.

Les étoiles centrales les plus fréquentes sont celles à dix et douze branches ; pour ces dernières, quatre constructions différentes utilisant les types de pentagones satellites seront étudiées.



Incrustations de néphrite dans le marbre du pistach de la médersa Oulough Begh au Registan.

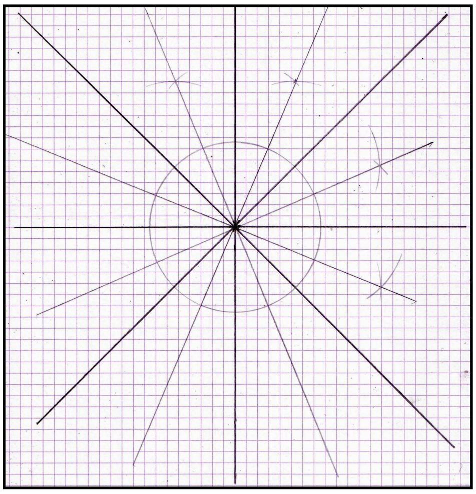


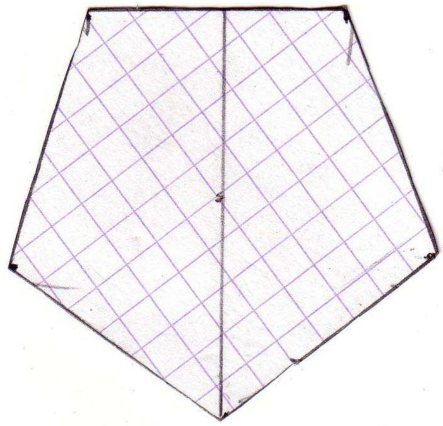
Cette composition convergente d'étoiles de la coupole de la médersa Abdul Aziz Khan à Boukhara comporte plusieurs étages d'étoiles :

- *L'étoile à seize, centrale, est formée par une couronne de seize pentagones équilatères.*
- *Suivie par une couronne d'hexagones formés par des pentagones convexes*
- *Suivie par un étage d'étoiles à sept construit par des pentagones convexes.*

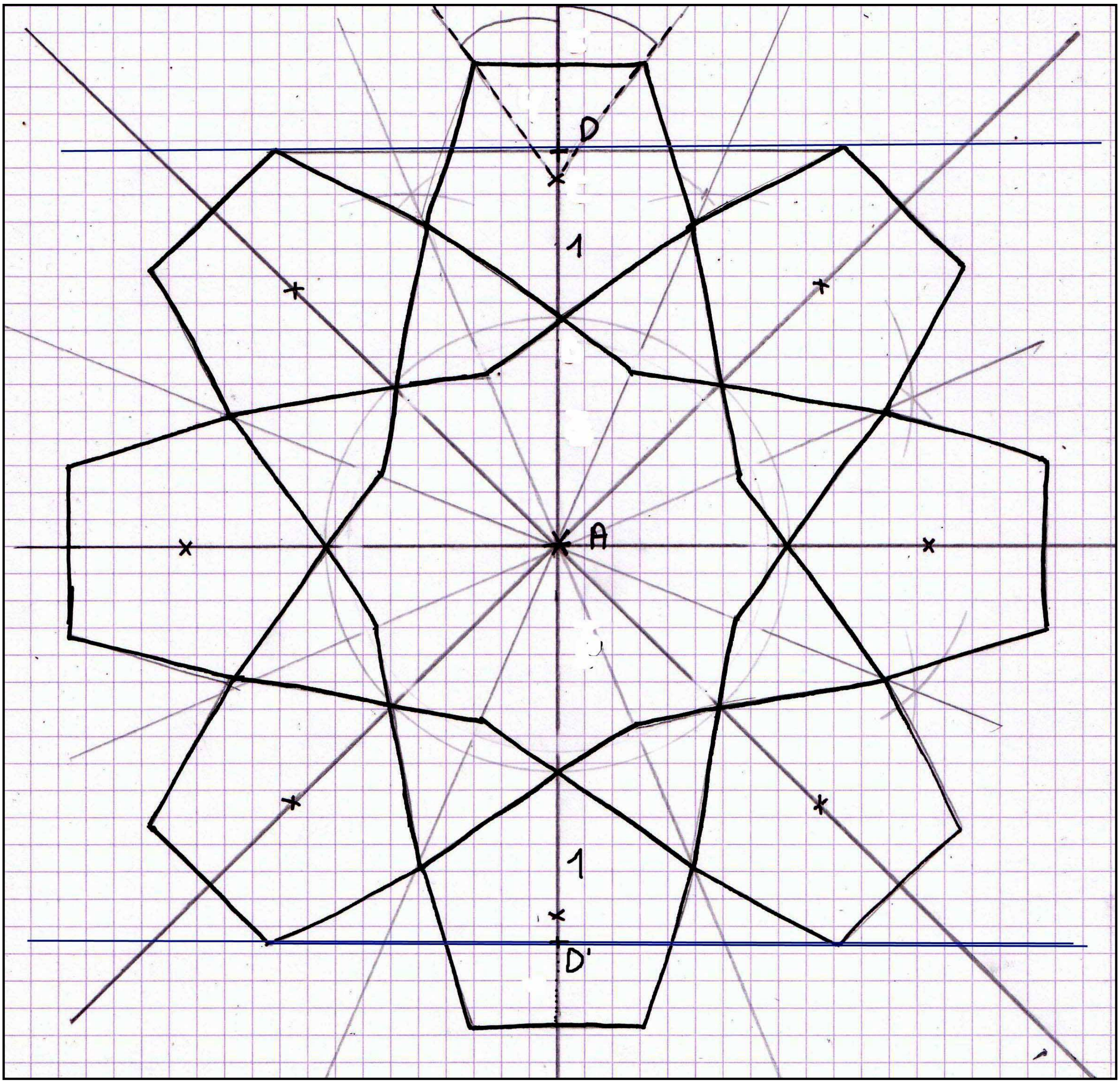
L’étoile à huit :

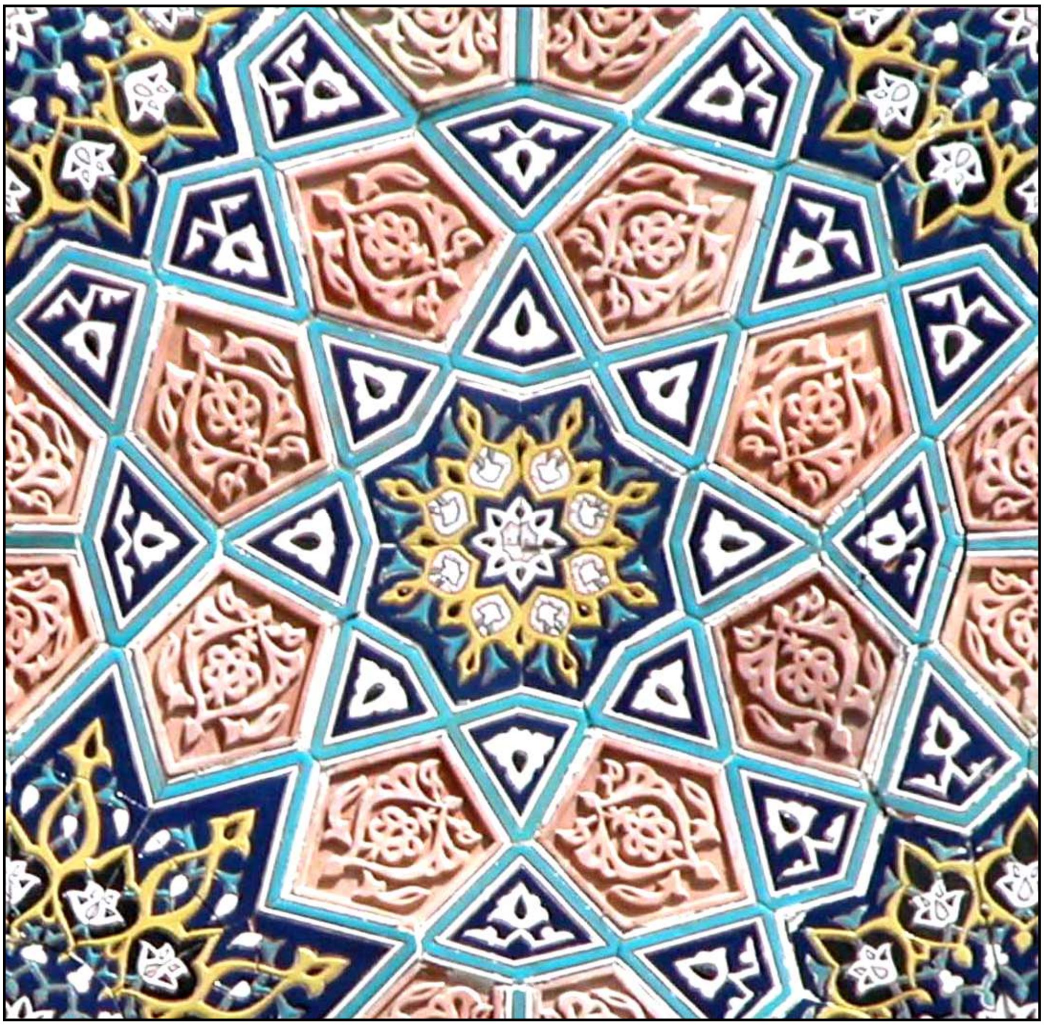
- Les étoiles à huit pétales sont ci-dessous construites par des pentagones convexes:

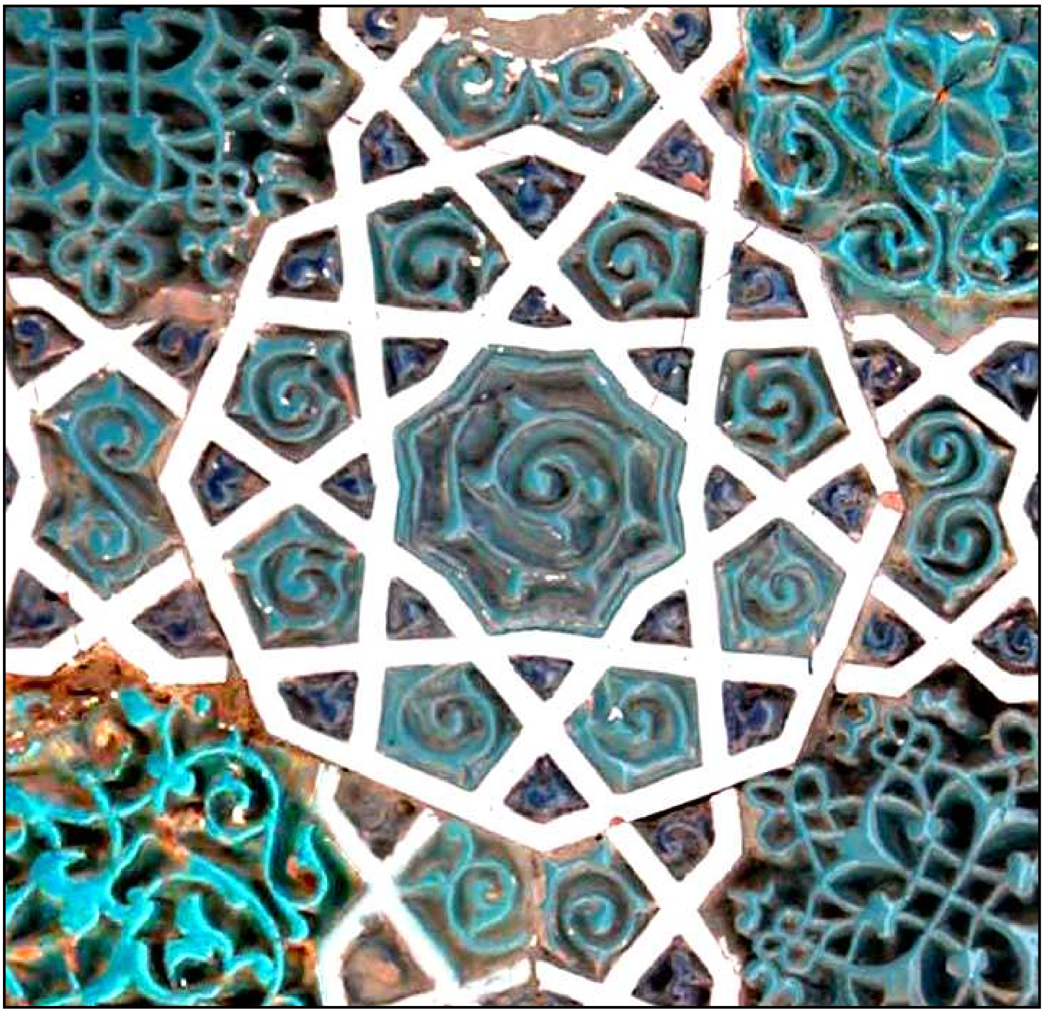




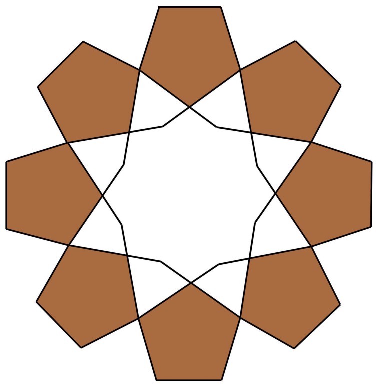
Construction du module correspondant.



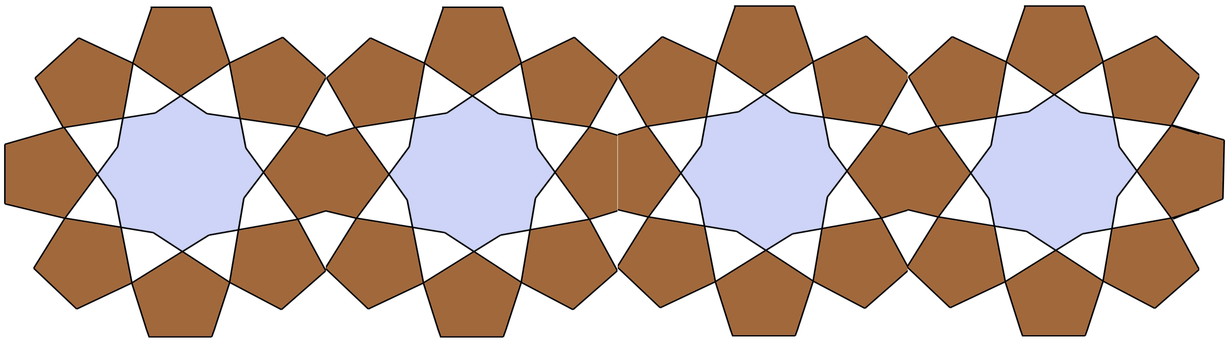


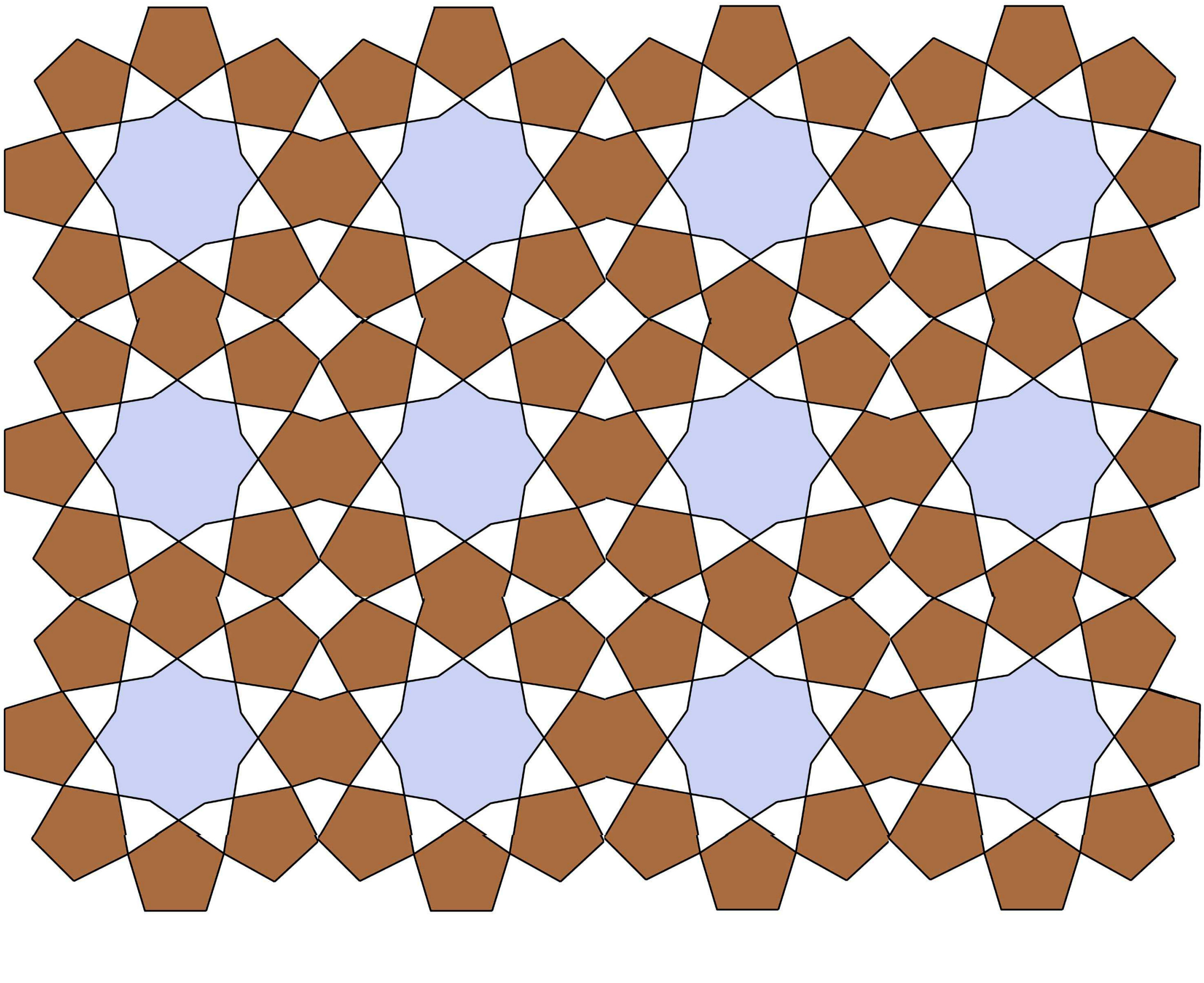


Construction d'un pavage.

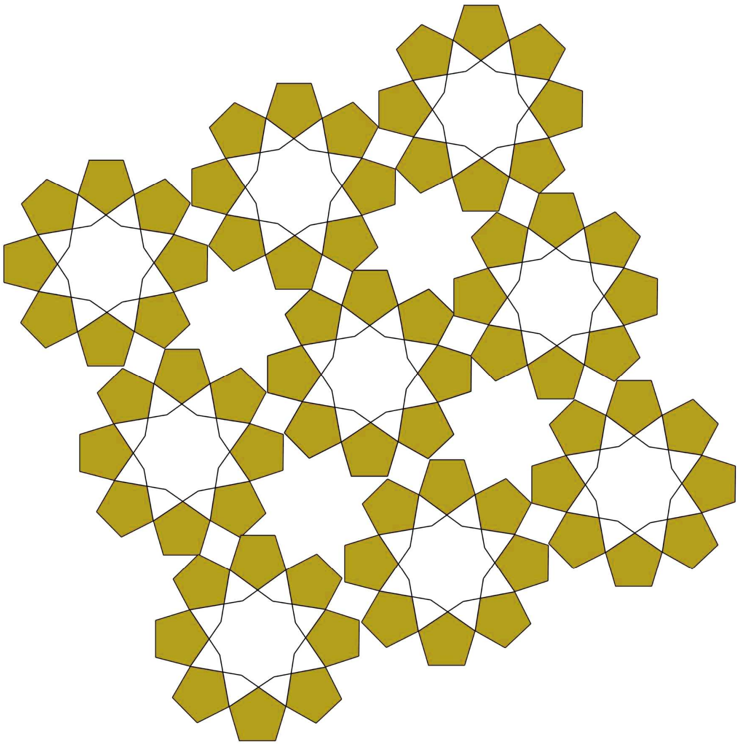


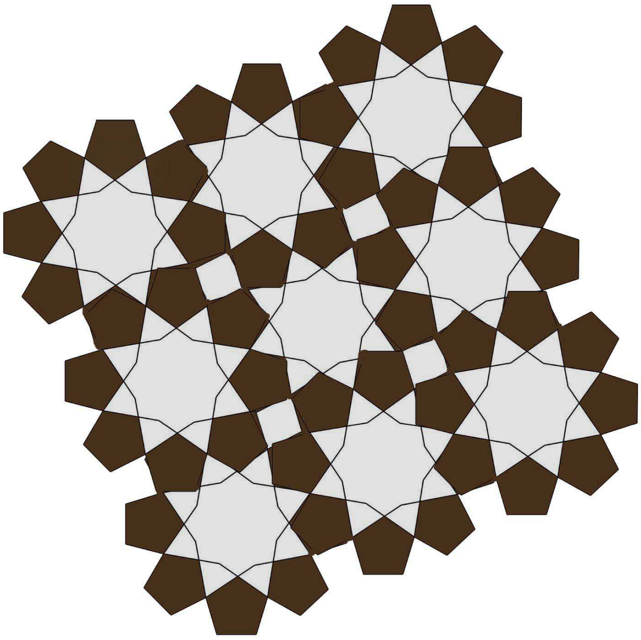
A droite, le module servant à construire la frise et le pavage ci dessous.

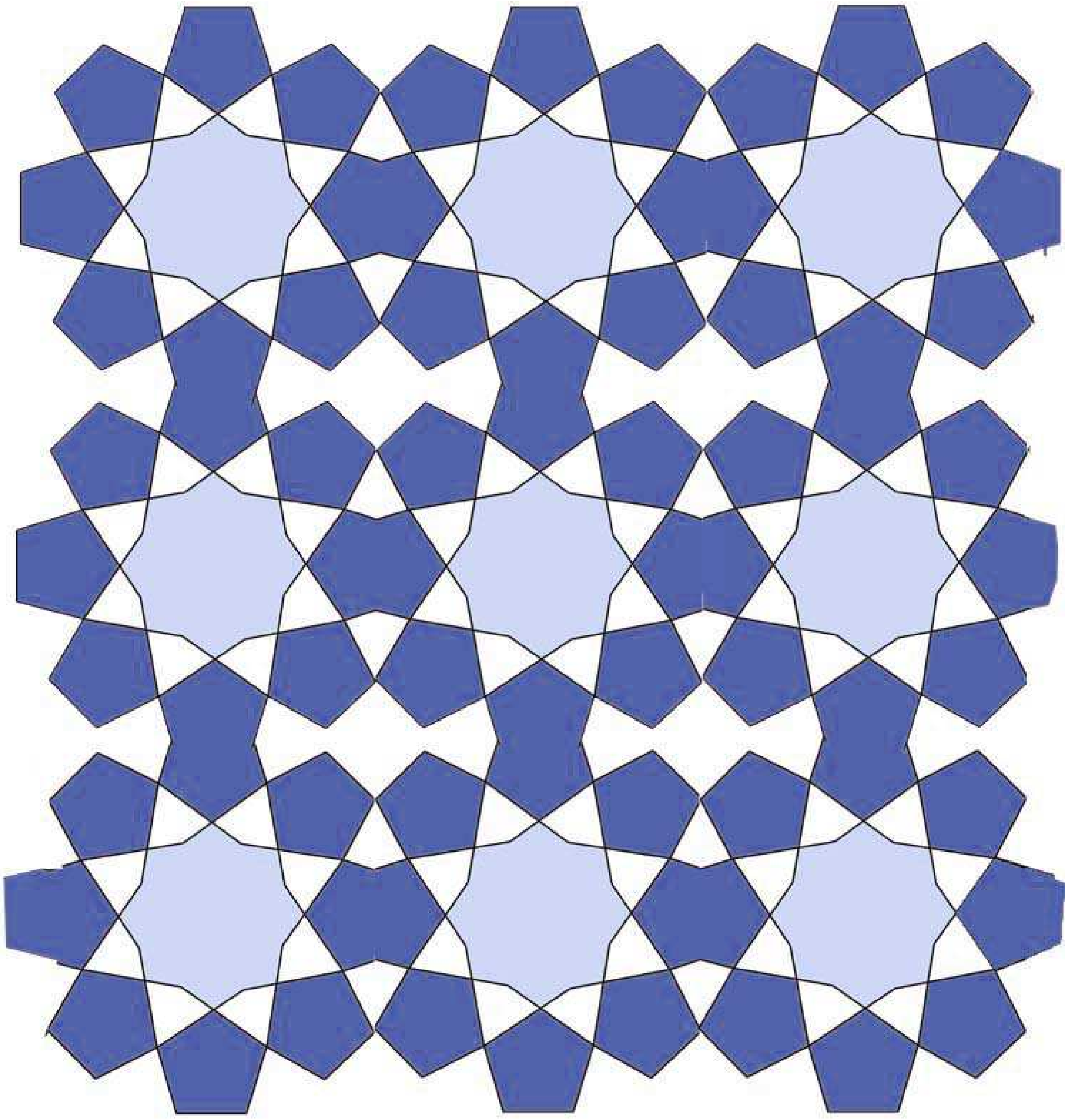




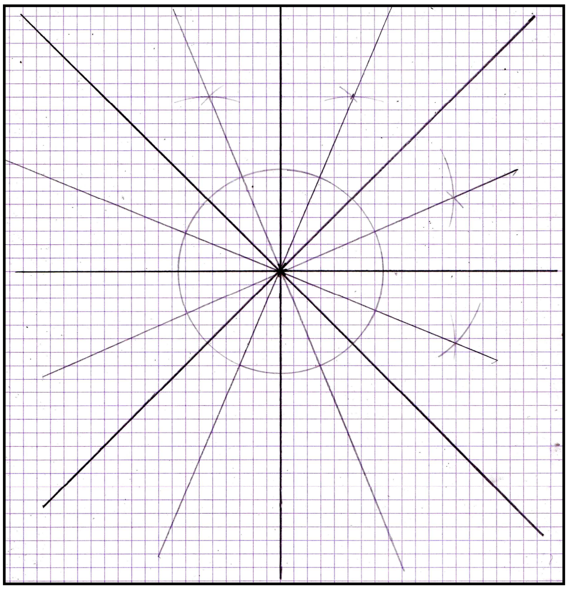
Autres compositions possibles des modules :

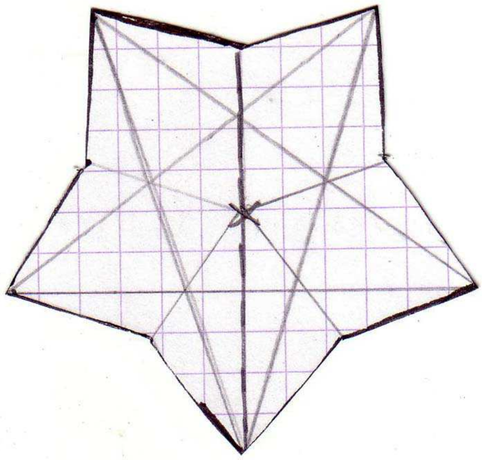




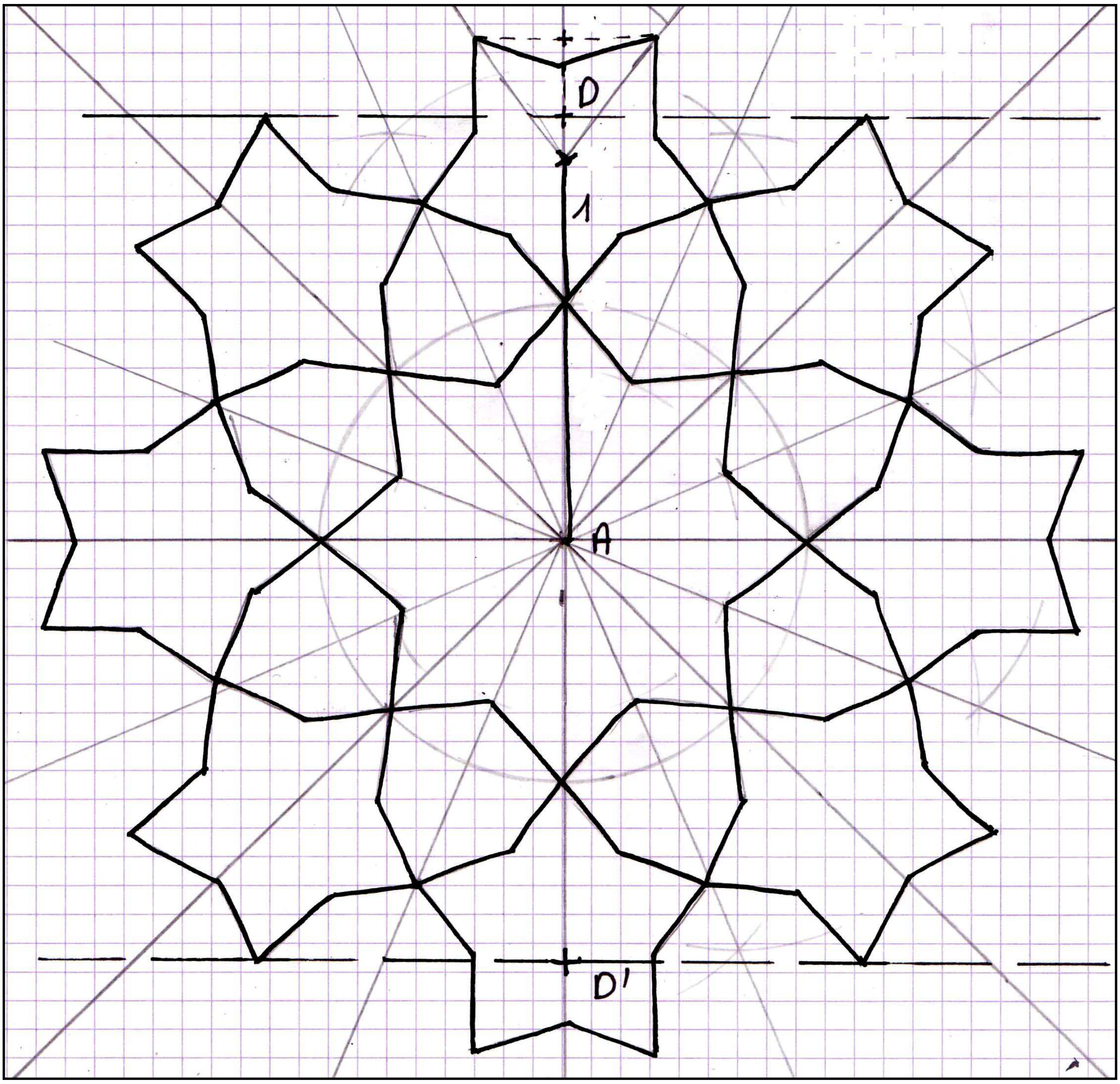


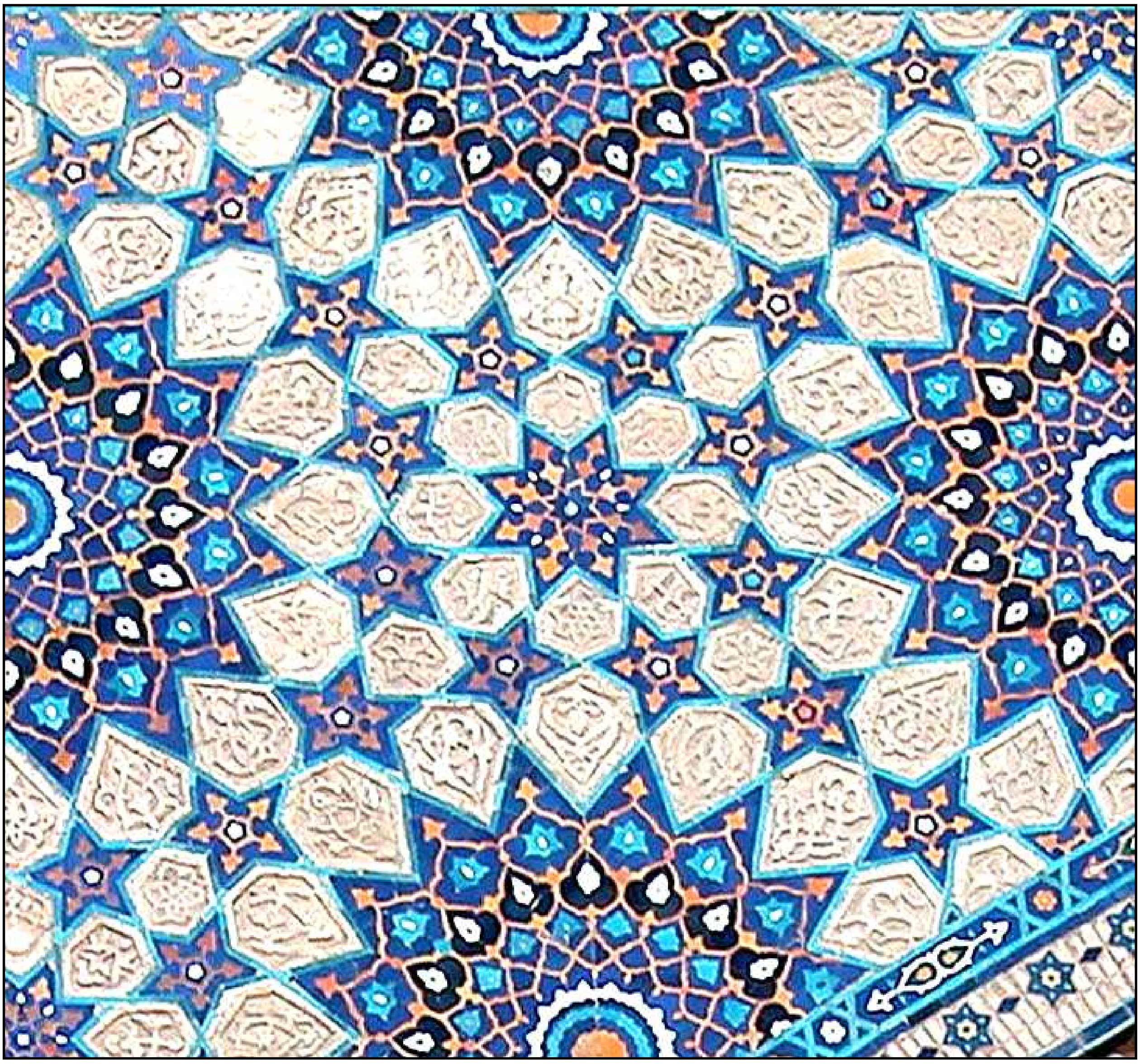
- Étoiles à huit construites avec des pentagones d'or :



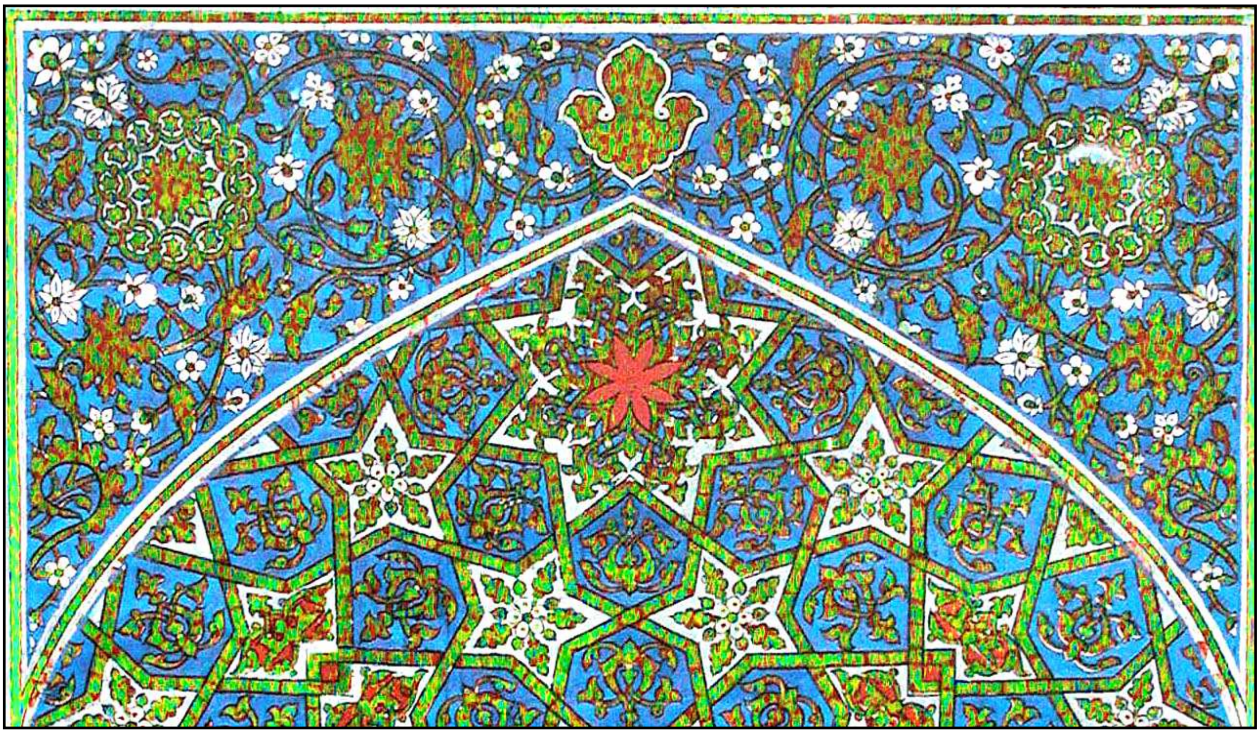


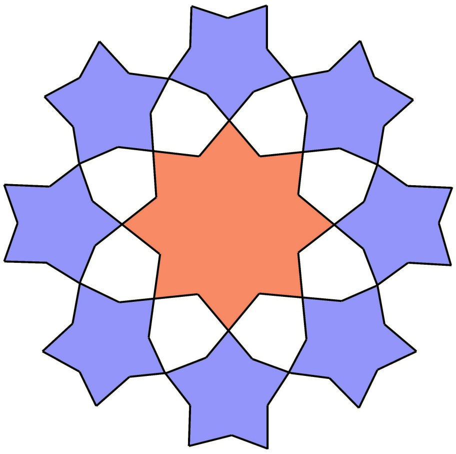
Sur-module correspondant.



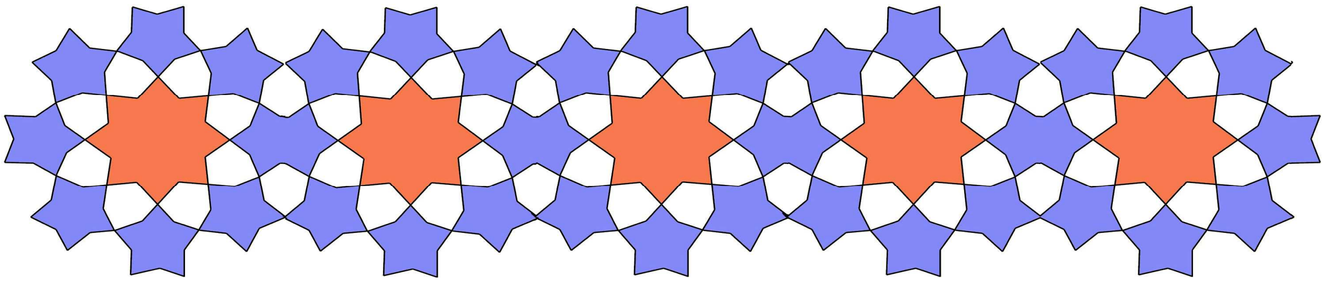


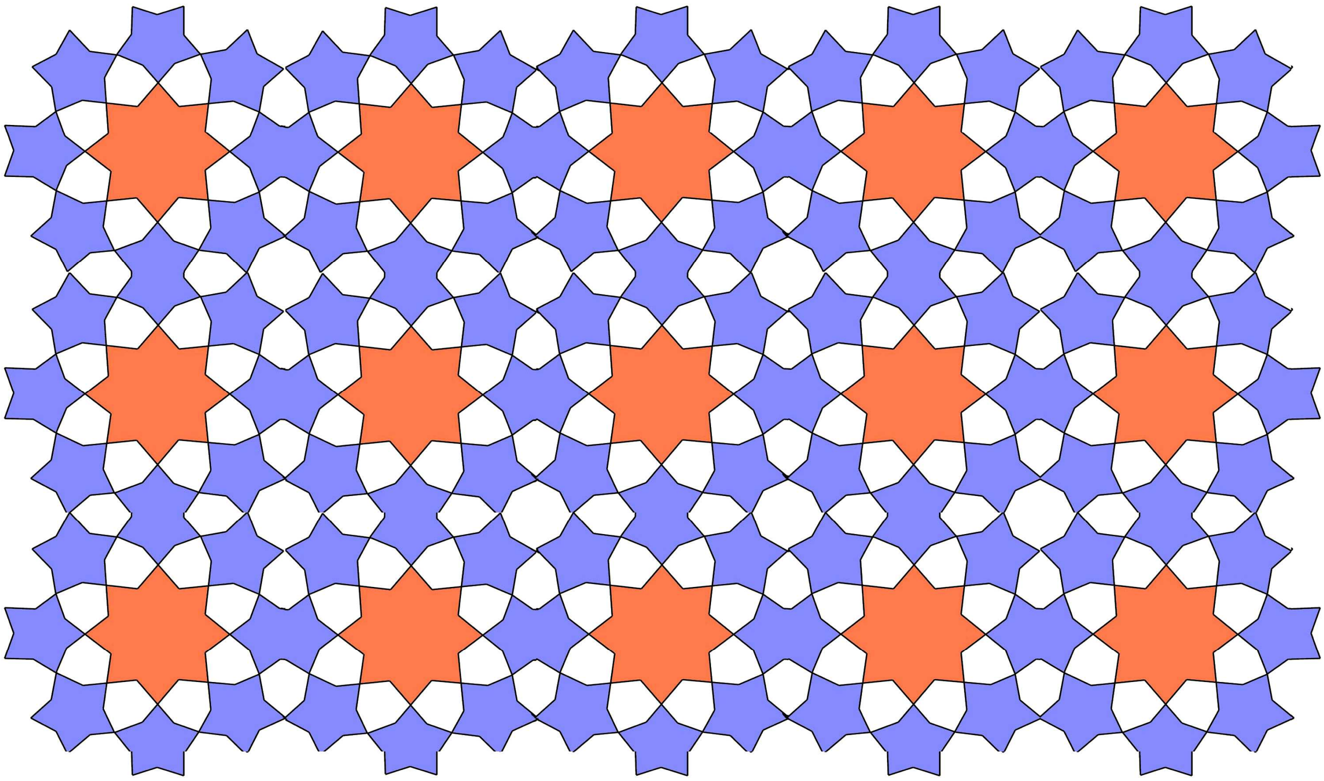
Registan de Samarcande : composition d'étoiles à seize formant une étoile à huit sur l'alfiz de la médersa Oulough Begh ; décoration de papier mâché (gantch) à la mosquée Tilla Khari.



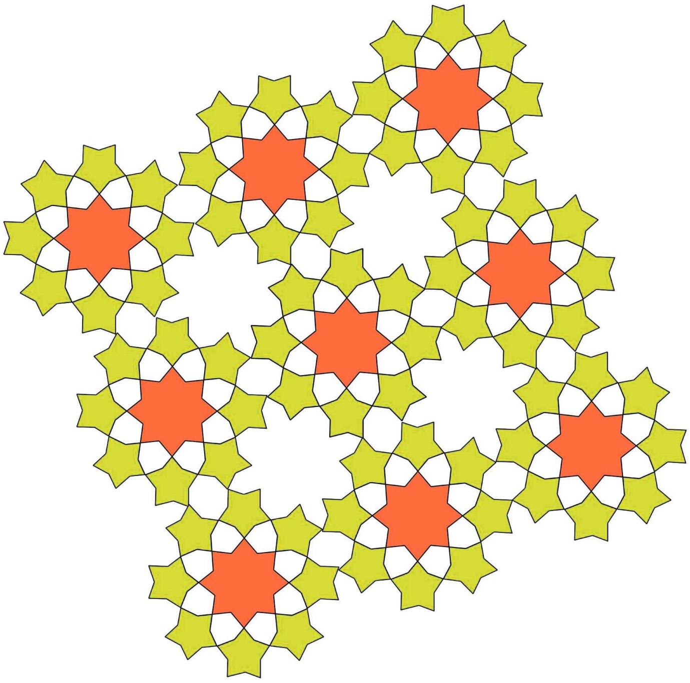


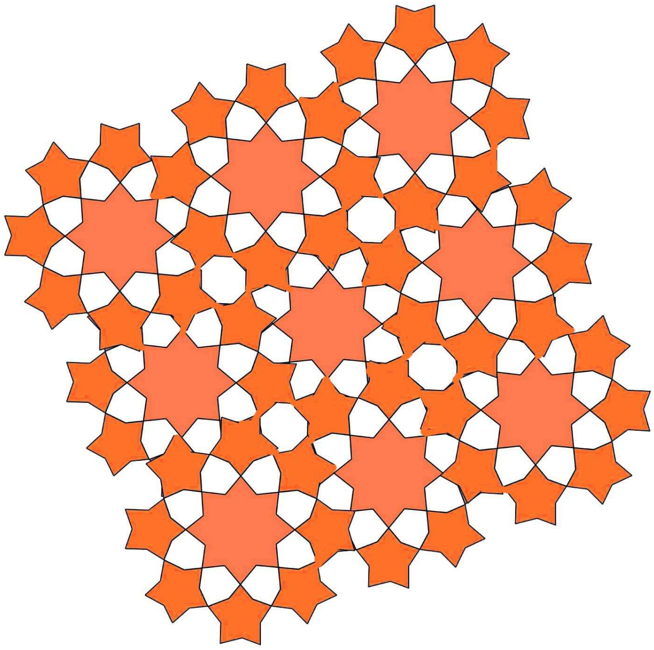
A droite, le sur-module servant à construire la frise du pavage ci-dessous.

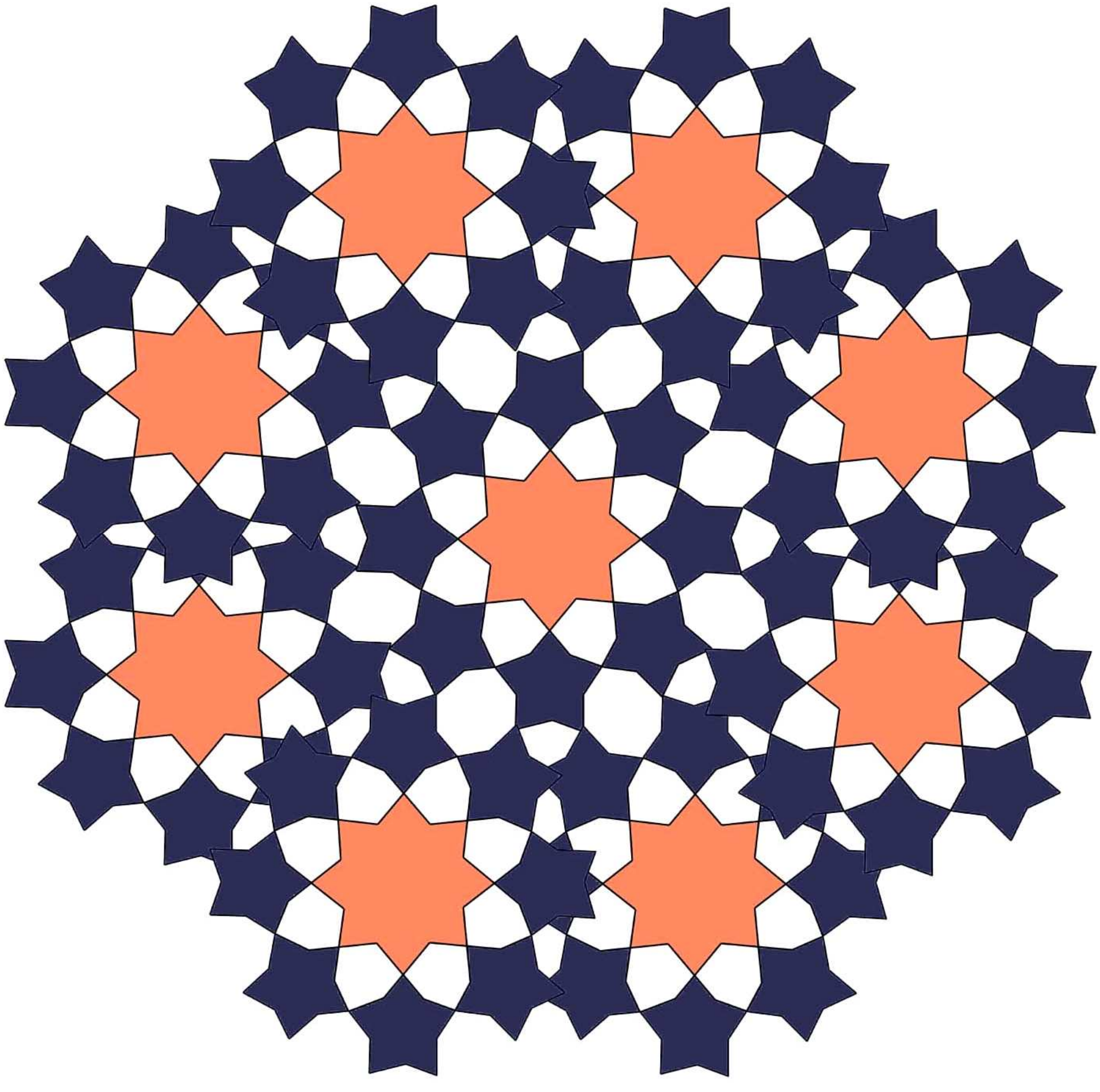




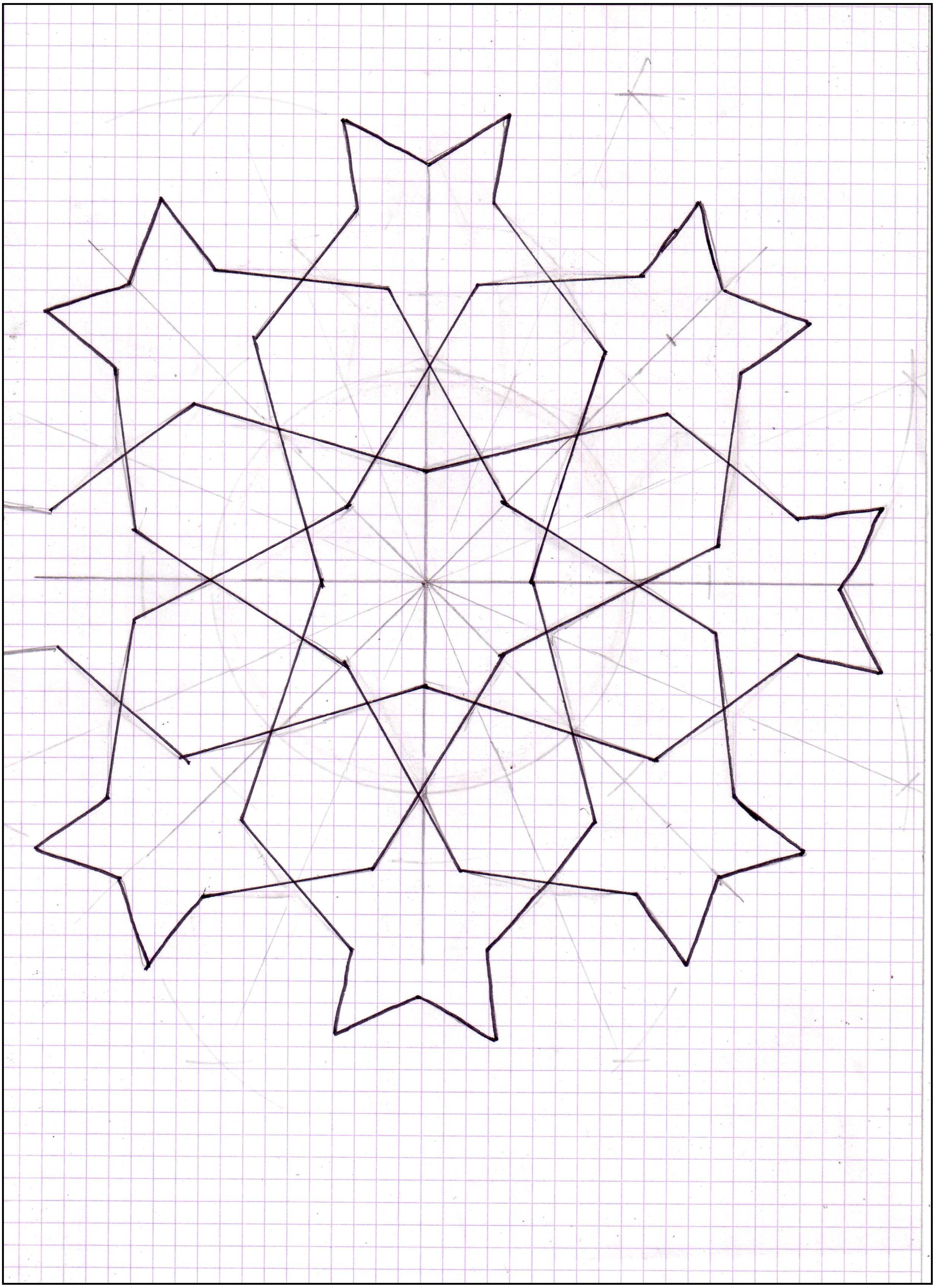
Autres compositions des sur-modules :

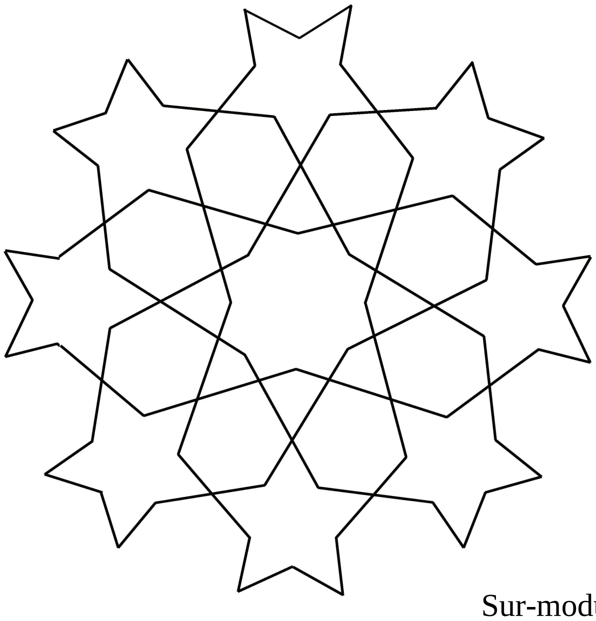


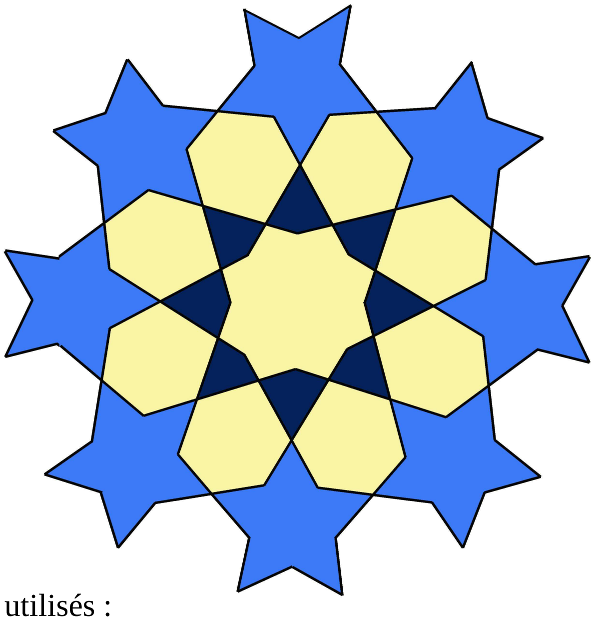




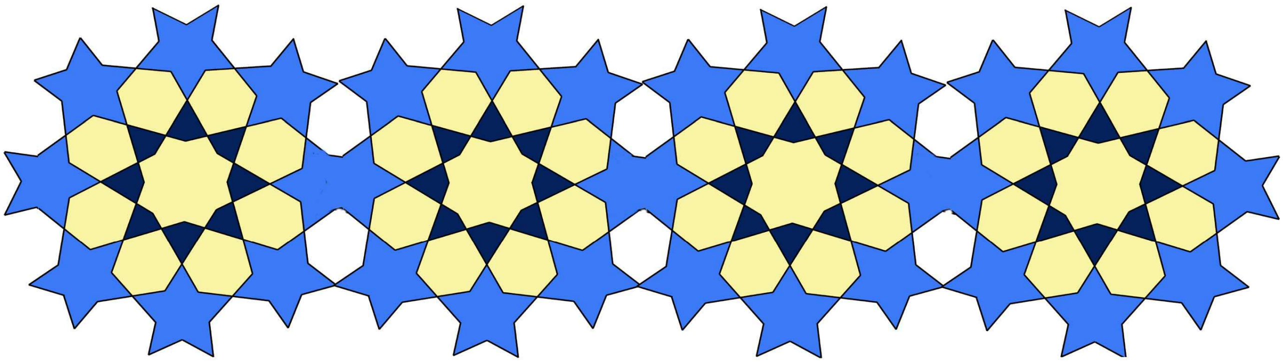
- *Les étoiles à huit ont pour satellites des pentagones équilatères :*

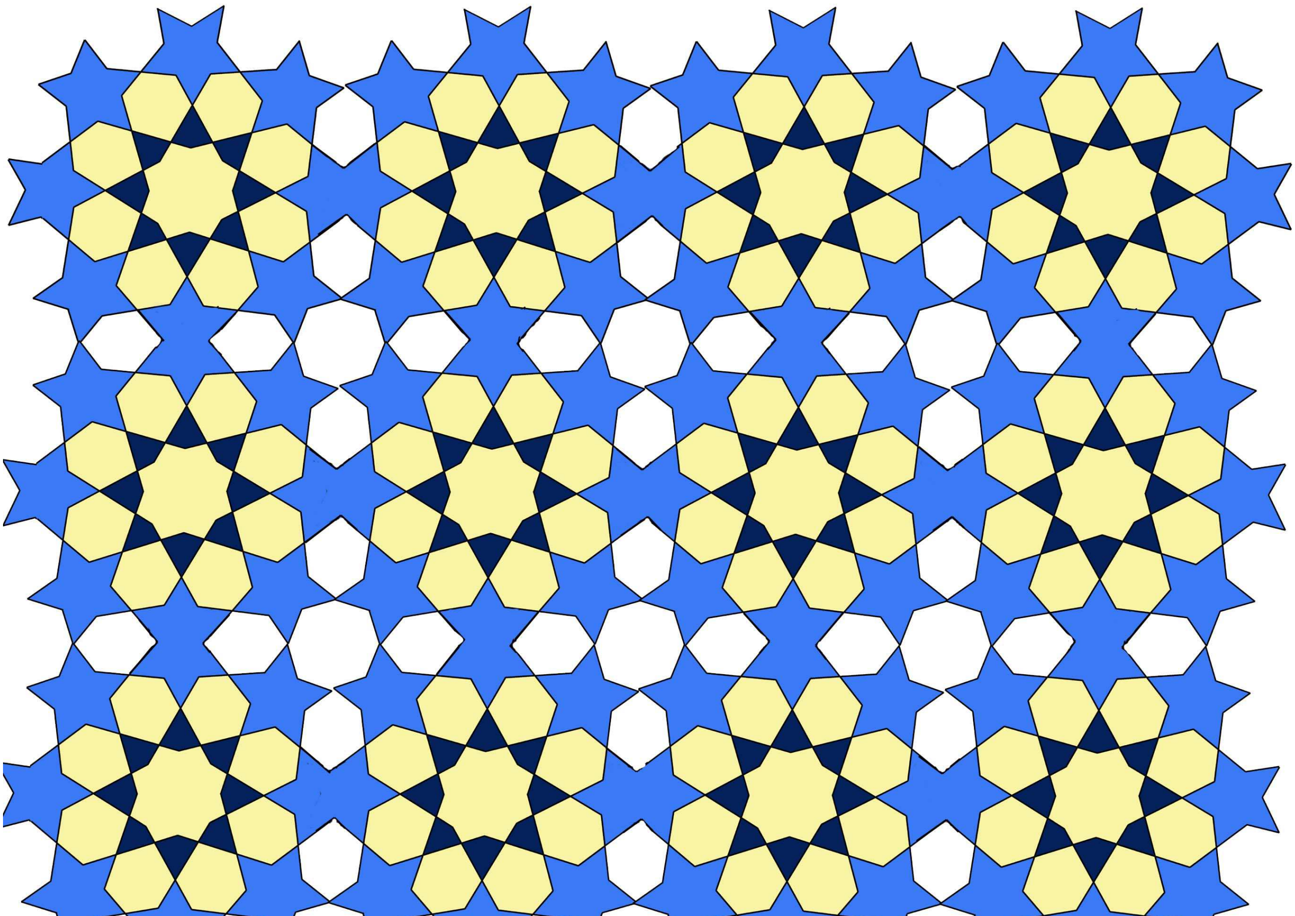


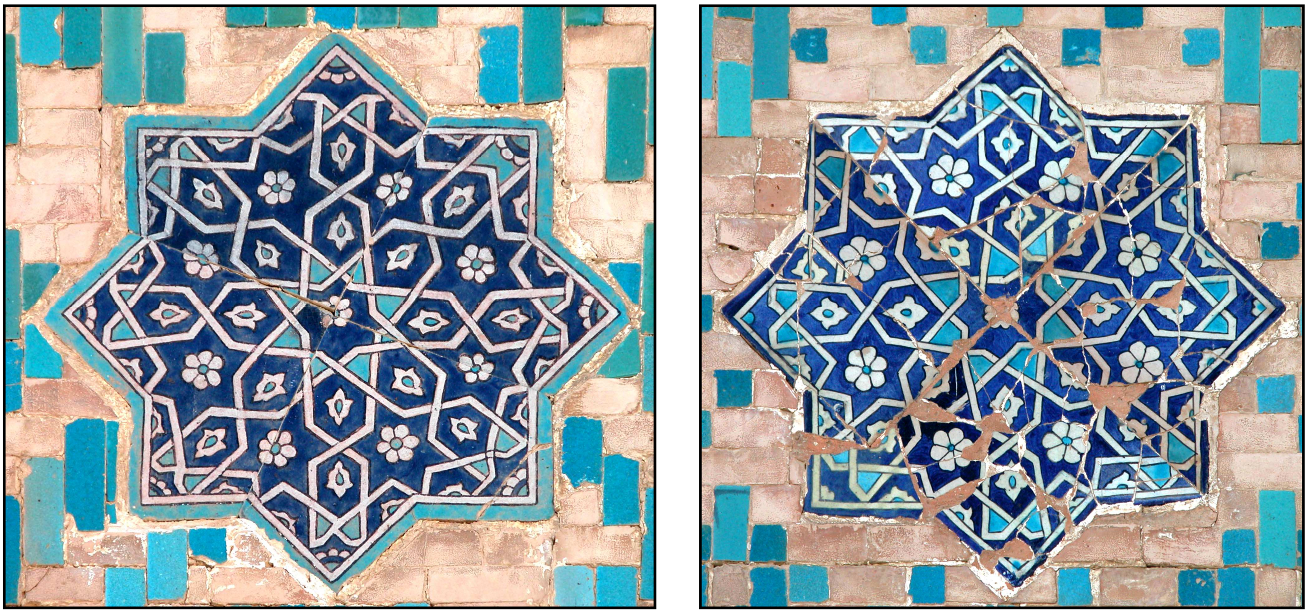




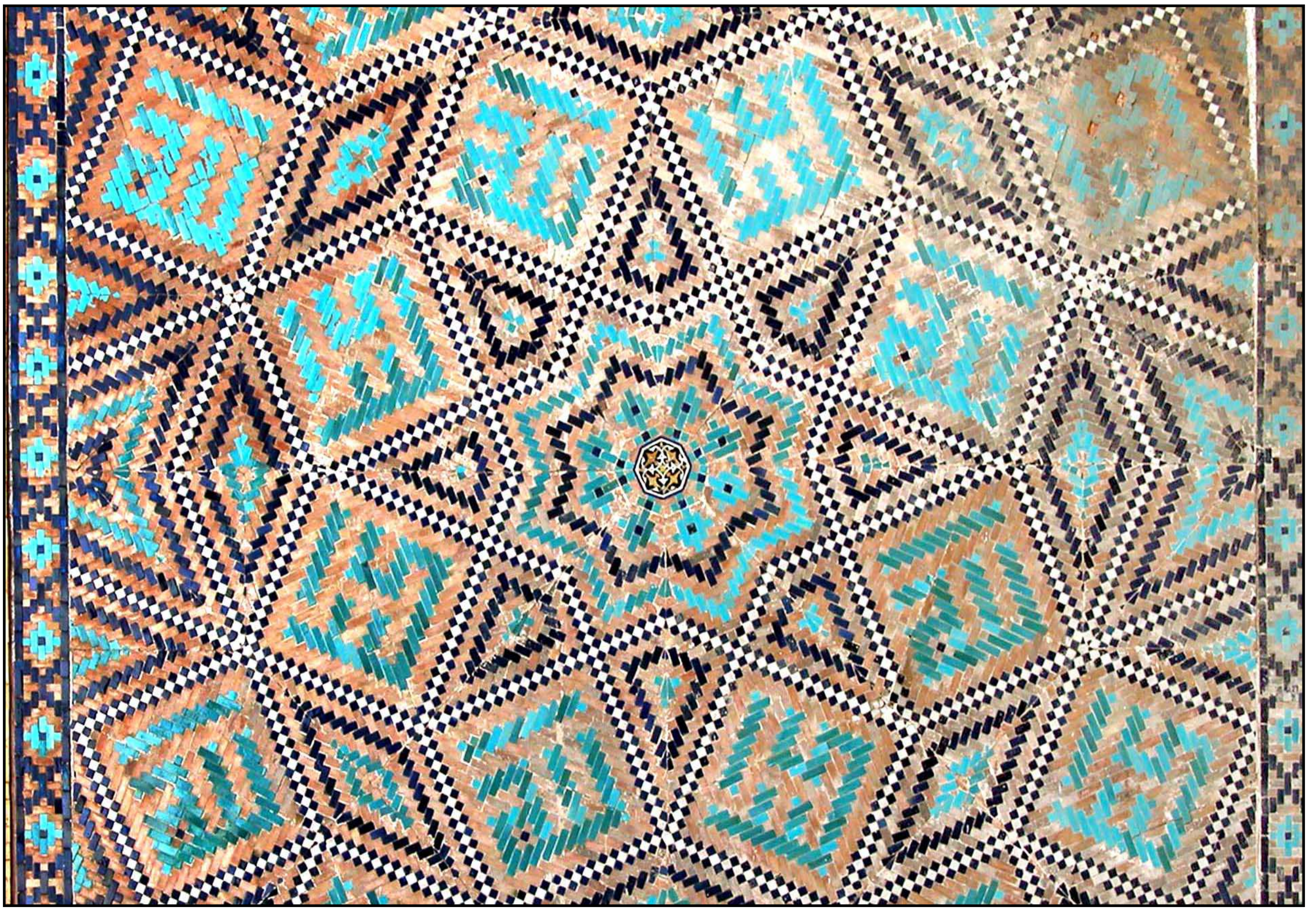
Sur-modules utilisés :







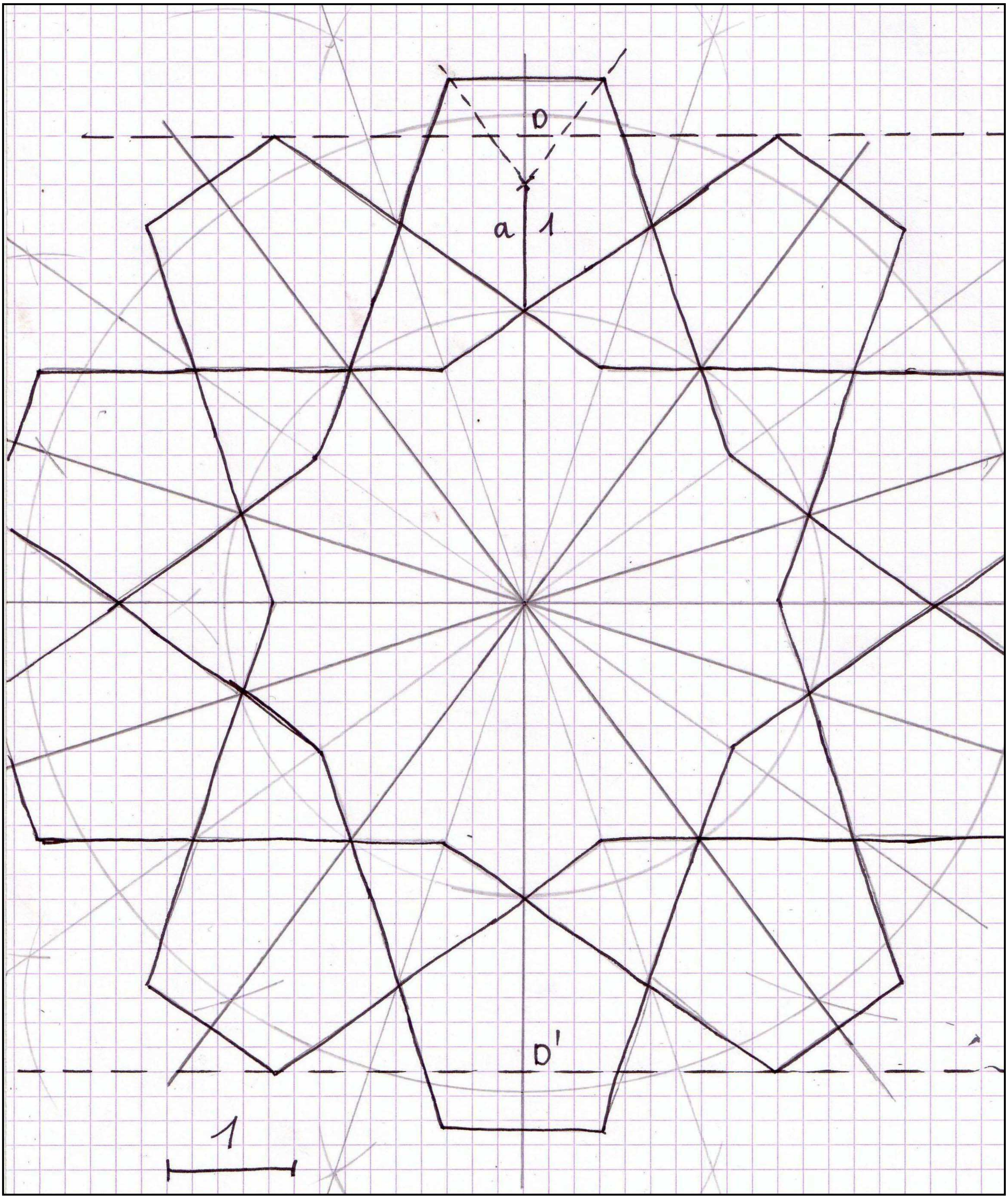
Majoliques de la mosquée Tilla Kari du Registan de Samarcande.

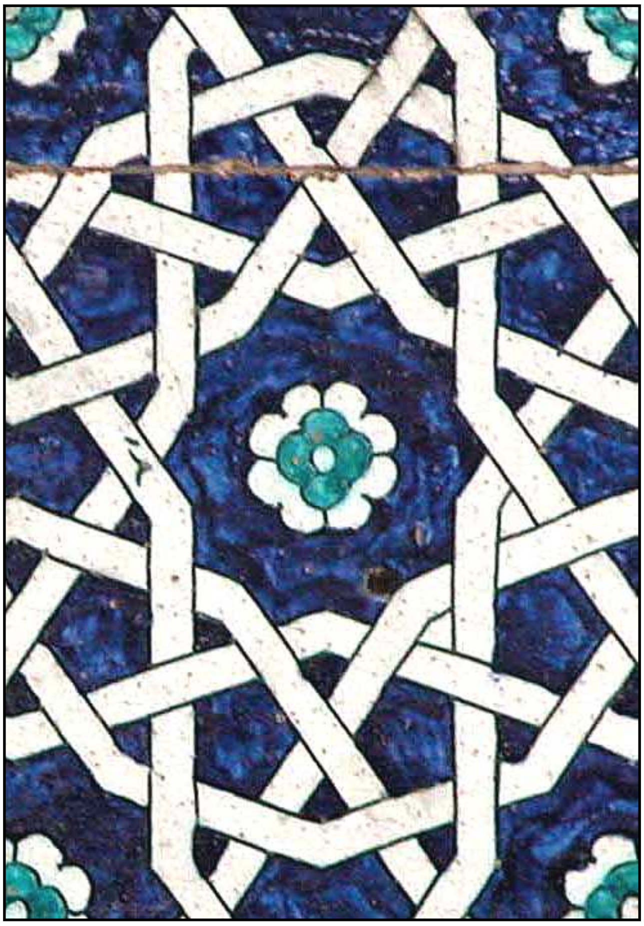


Kaschis du pistach de la médersa Chir Dor du Registan : étoiles à huit avec comme satellites des carrés ; c'est le même type de squelette pour les mosaïques romaines de Lixus au Maroc.

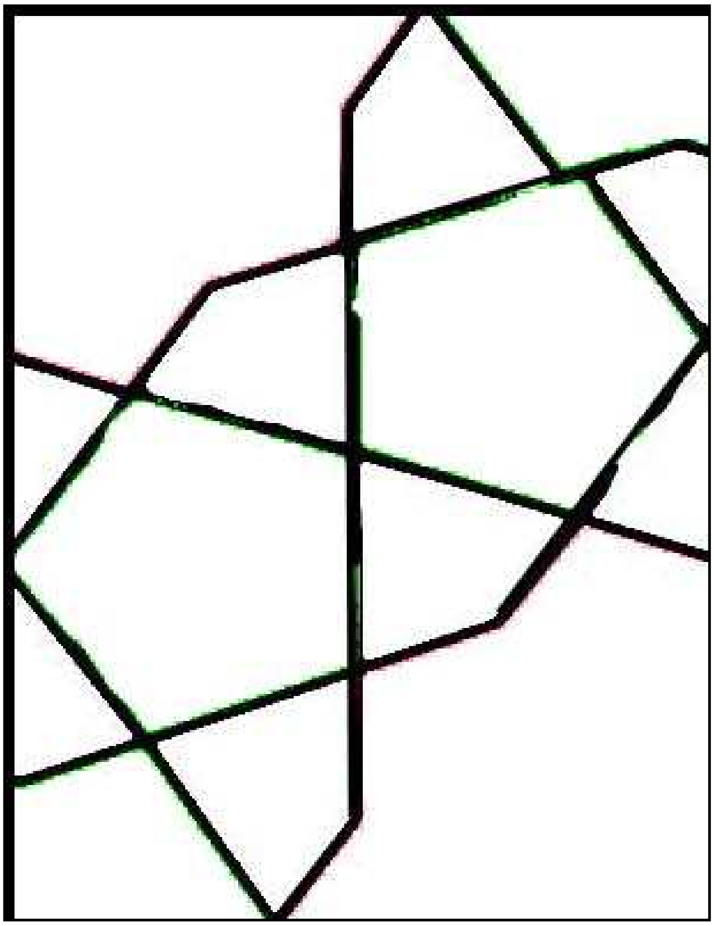
L'étoile à dix :

- *Étude de l'étoile à dix pétales avec pour satellites des pentagones convexes réguliers :*

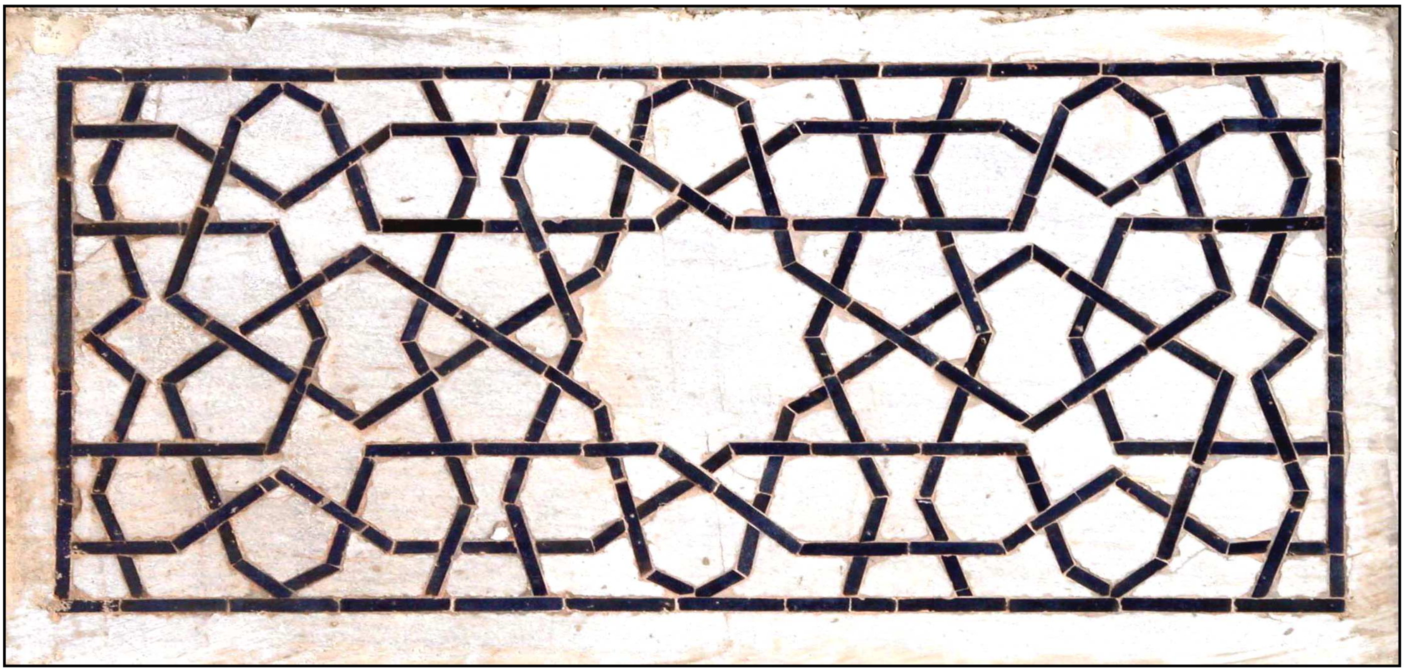




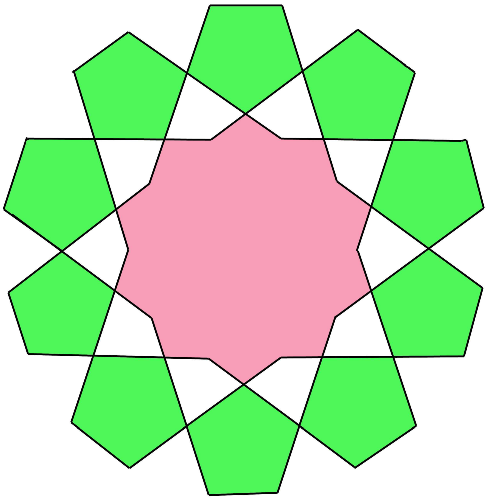
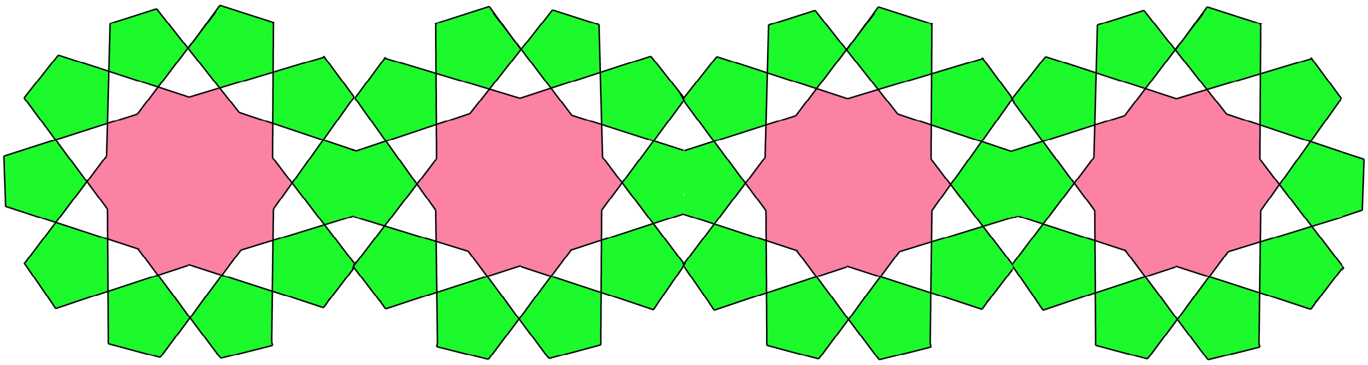
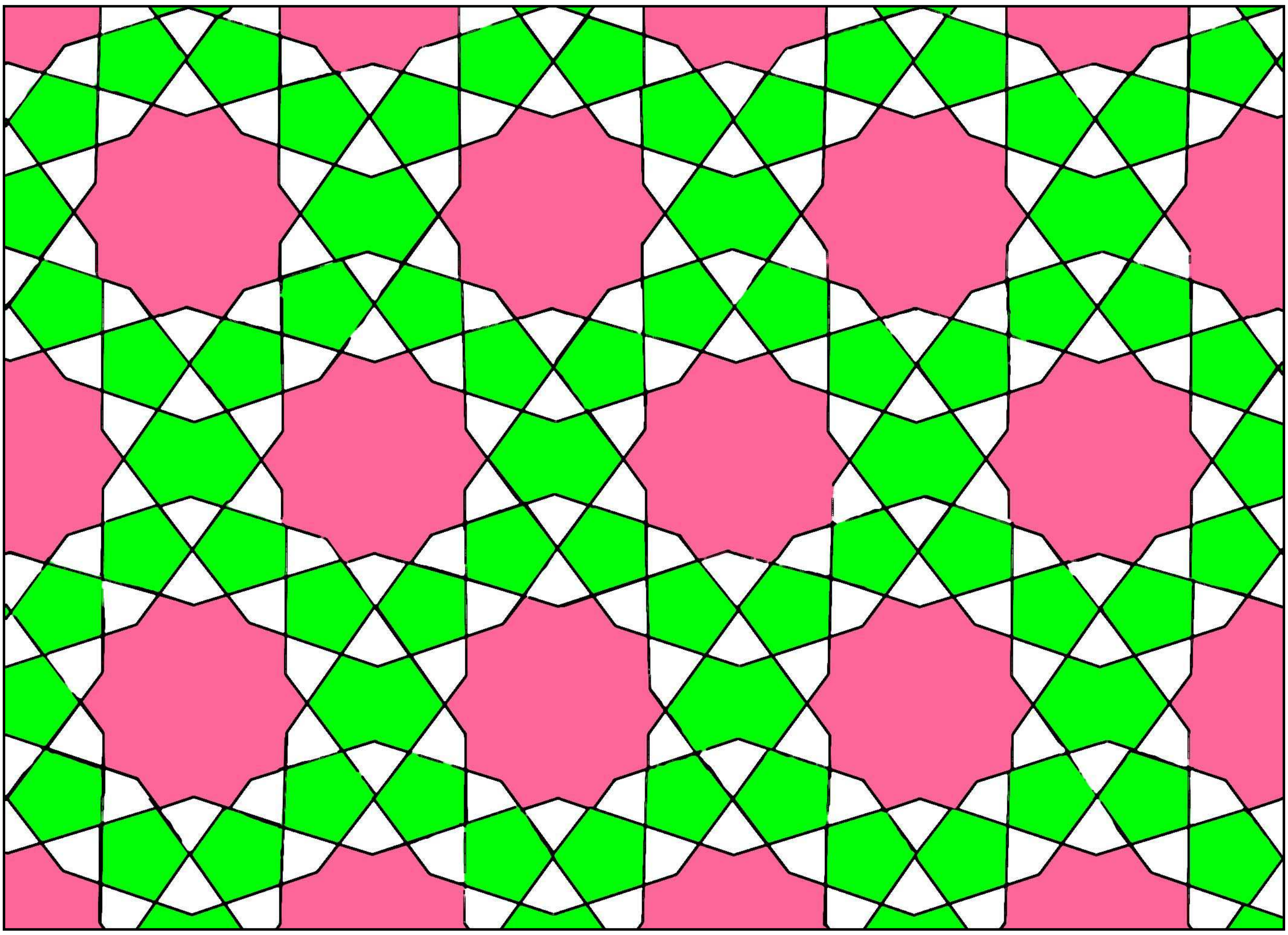
Palais forteresse de Khiva.

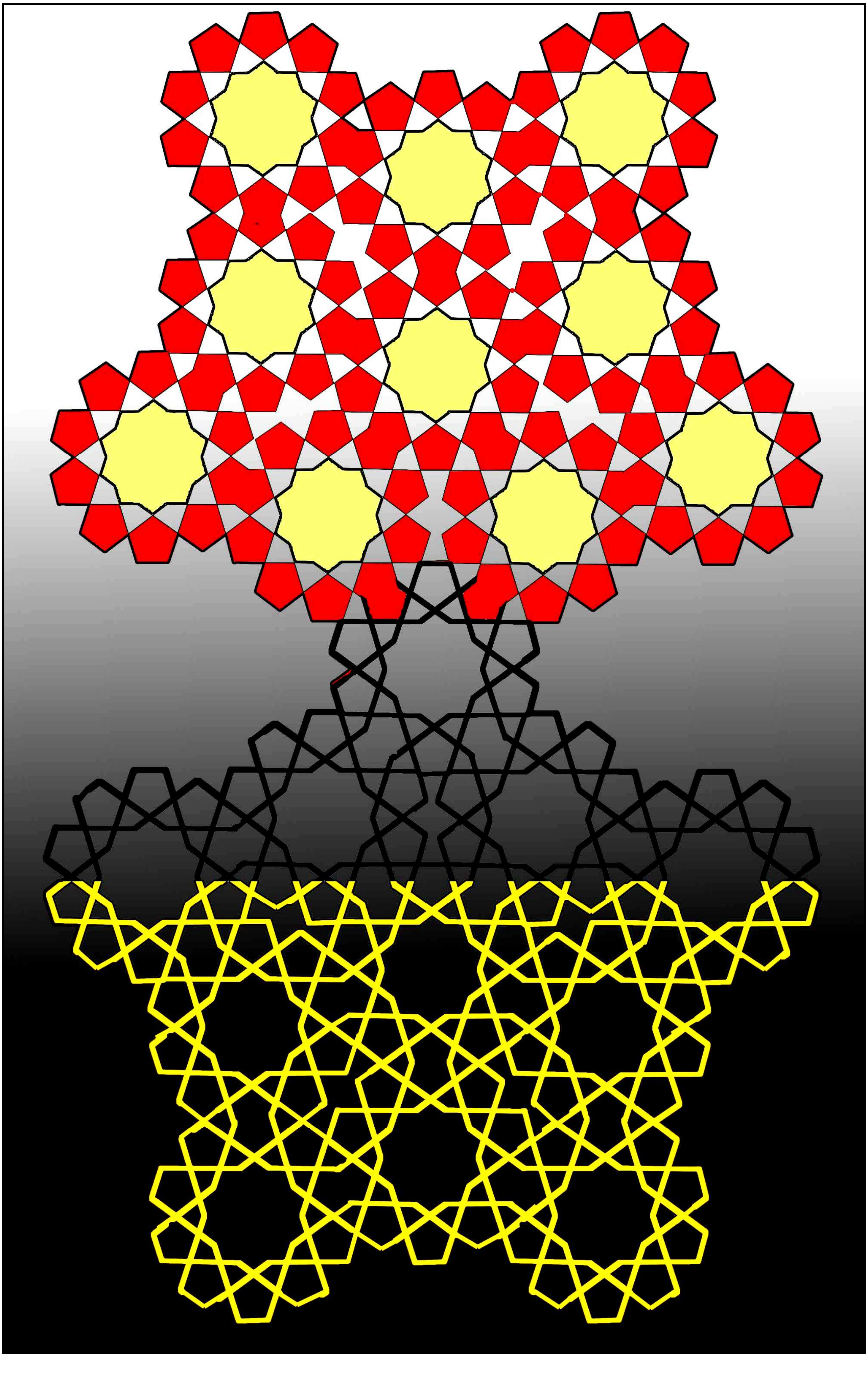


Carré minimal.

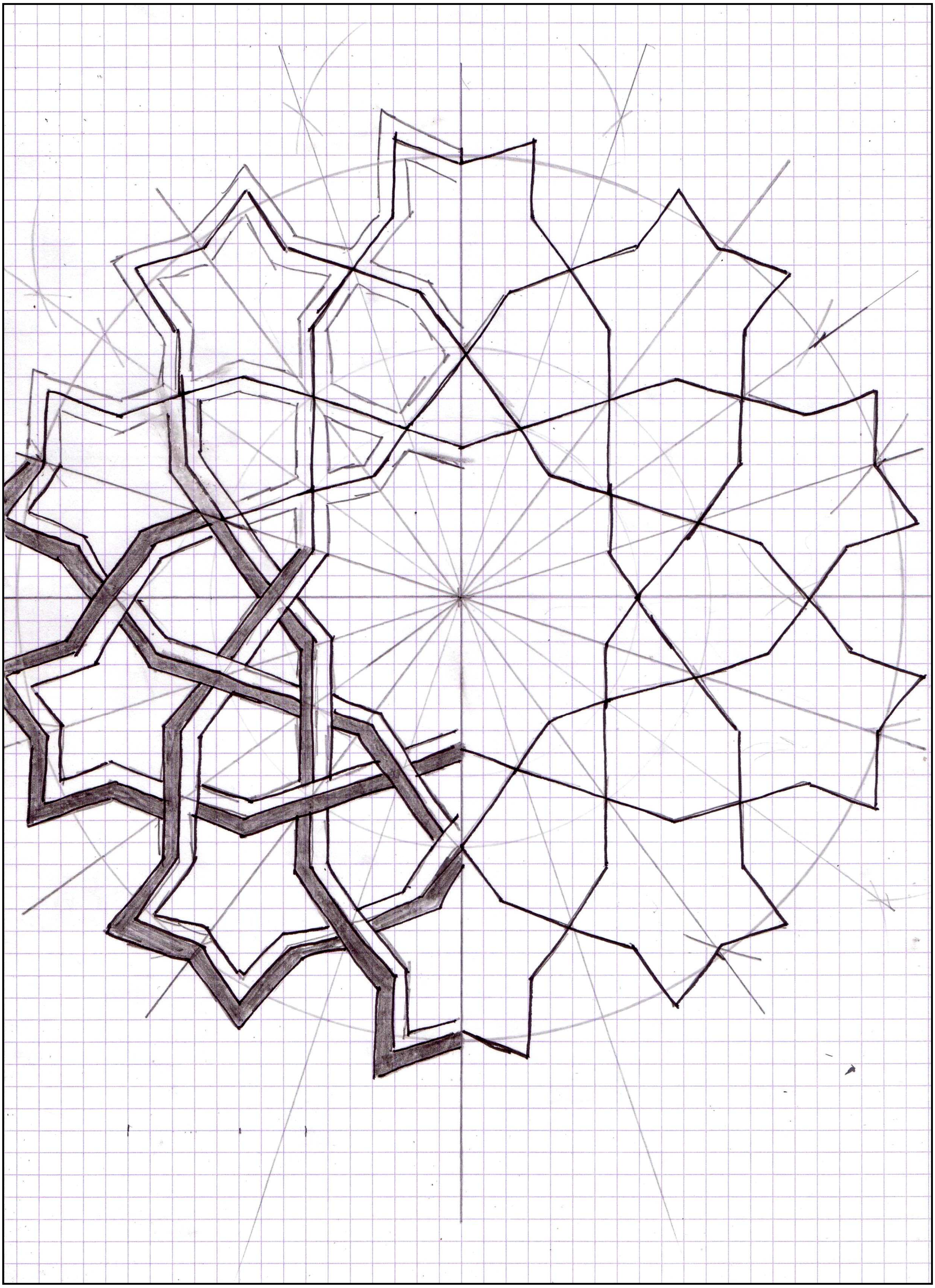


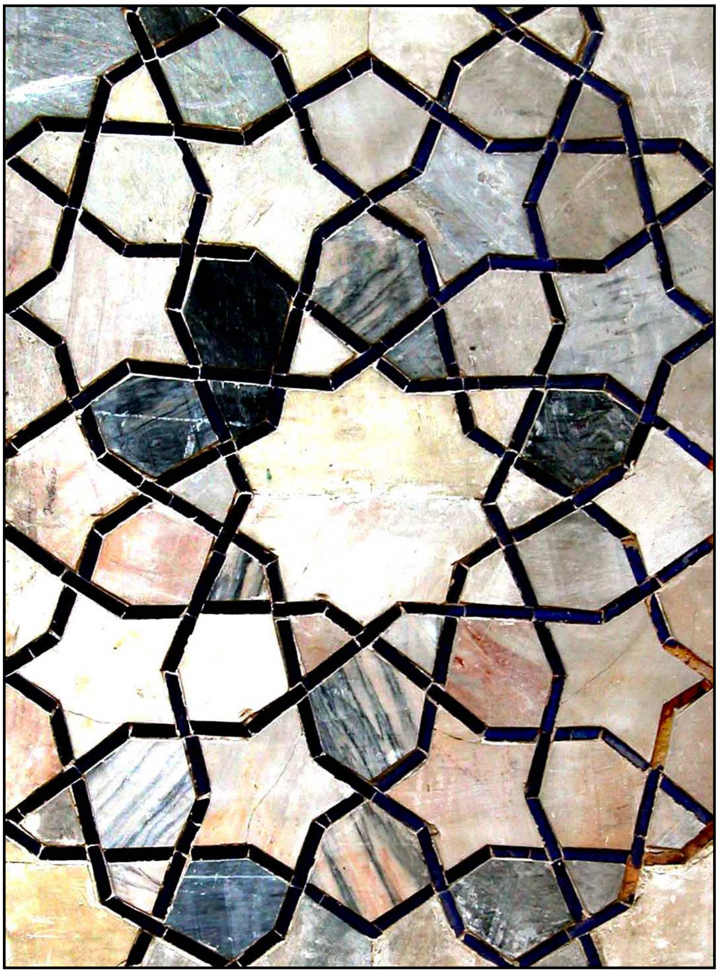
Médersa Oulough Begh à Samarcande.

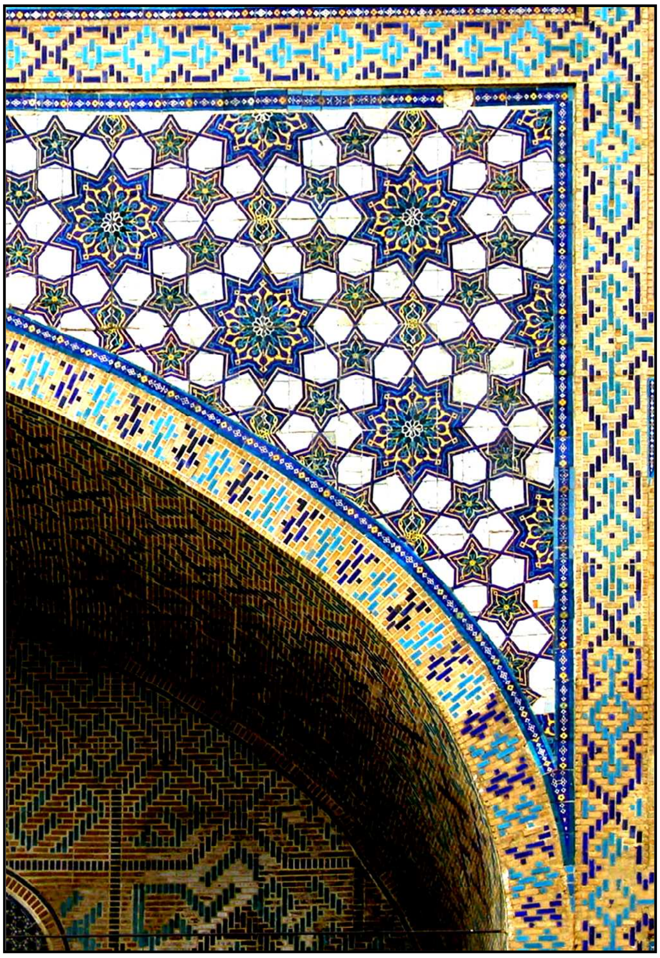


- Les étoiles à dix ont pour satellites des pentagones d’or :

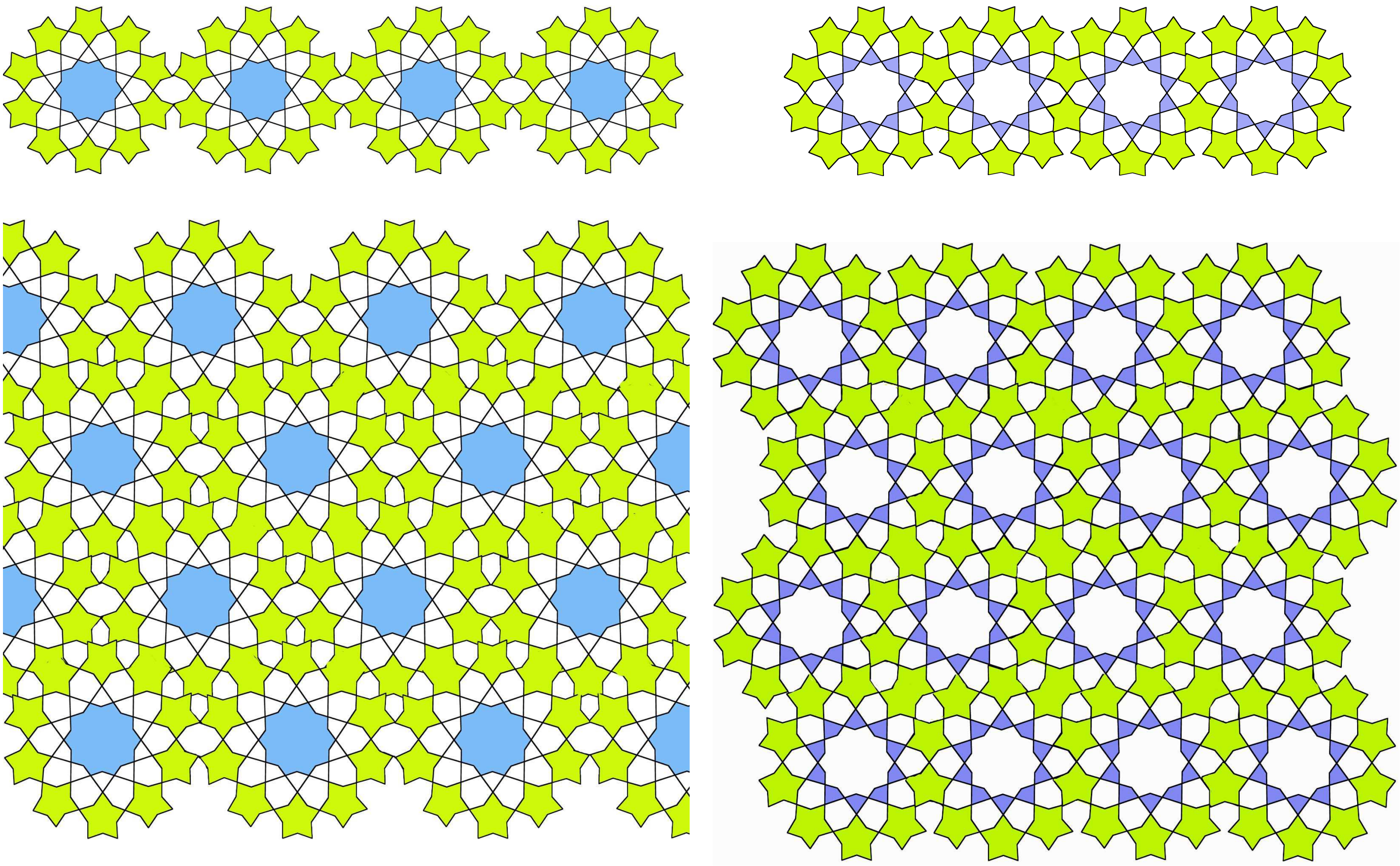




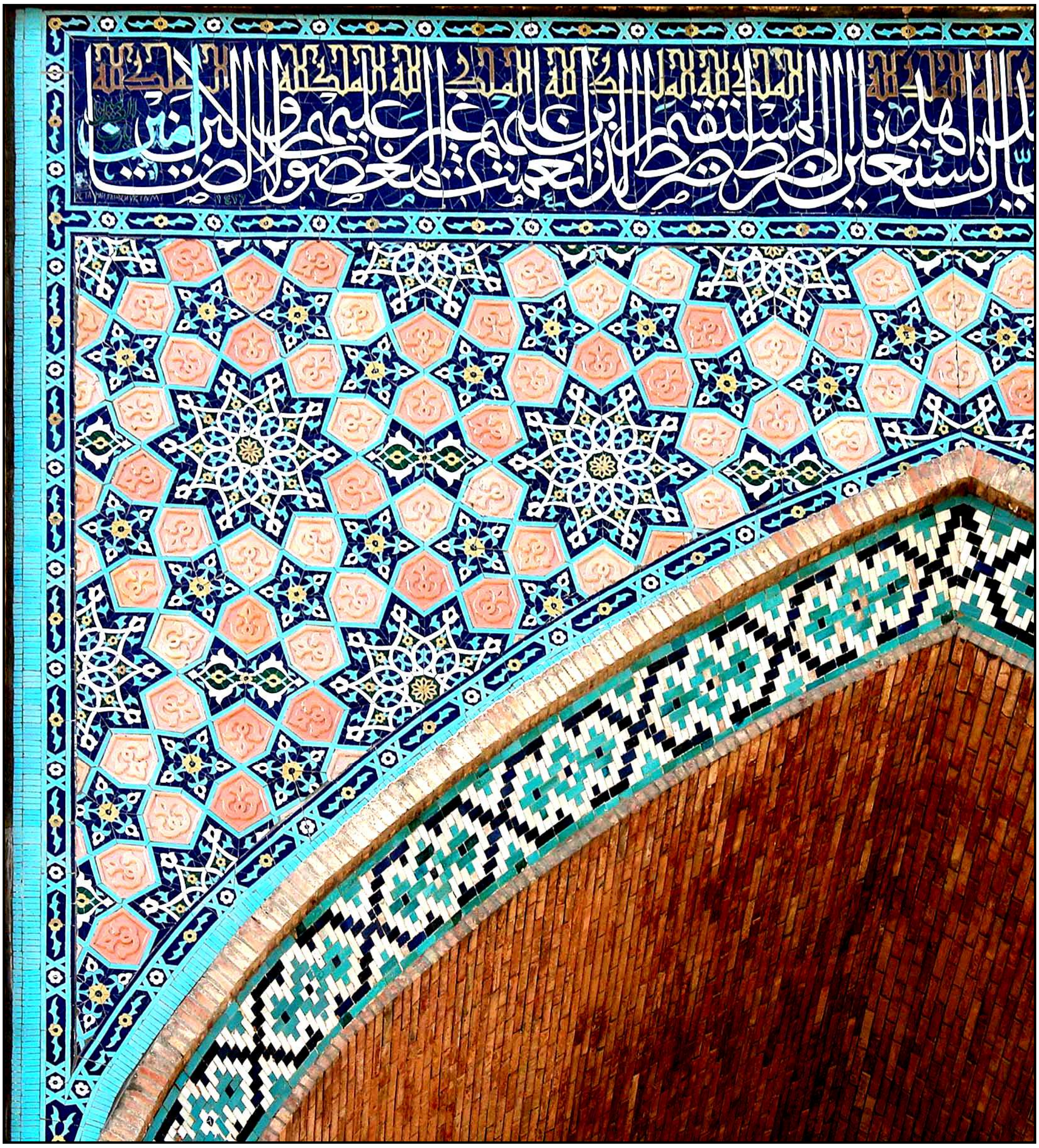
Pistach de la mosquée Bibi Kanun.



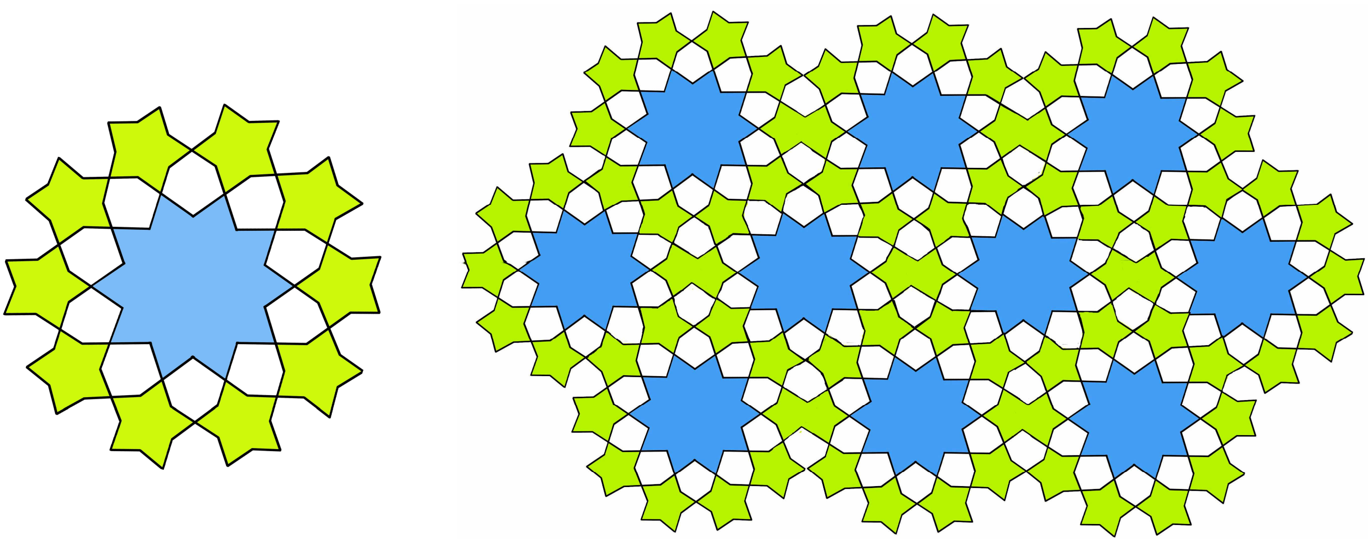
Alfiz de la mosquée Kok Goumbaz à Shahrisabz.



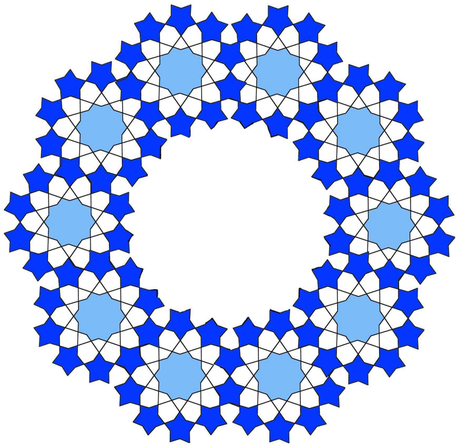
Deux types de composition avec le même sur-module.



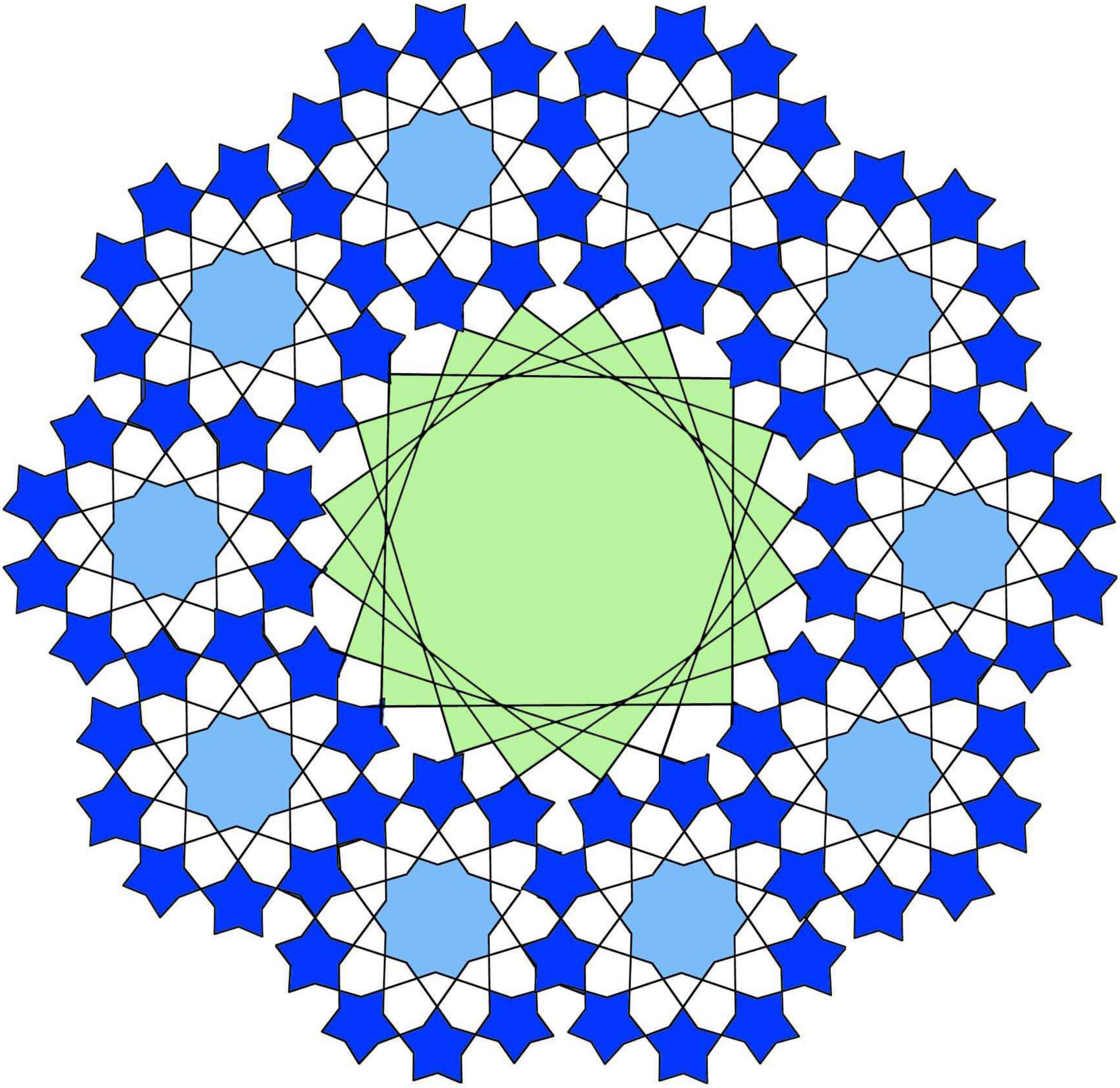
Étoiles à cinq avec pour satellites des octogones d'or sur l'alfiz de la médersa Koukeldash à Tachkent.



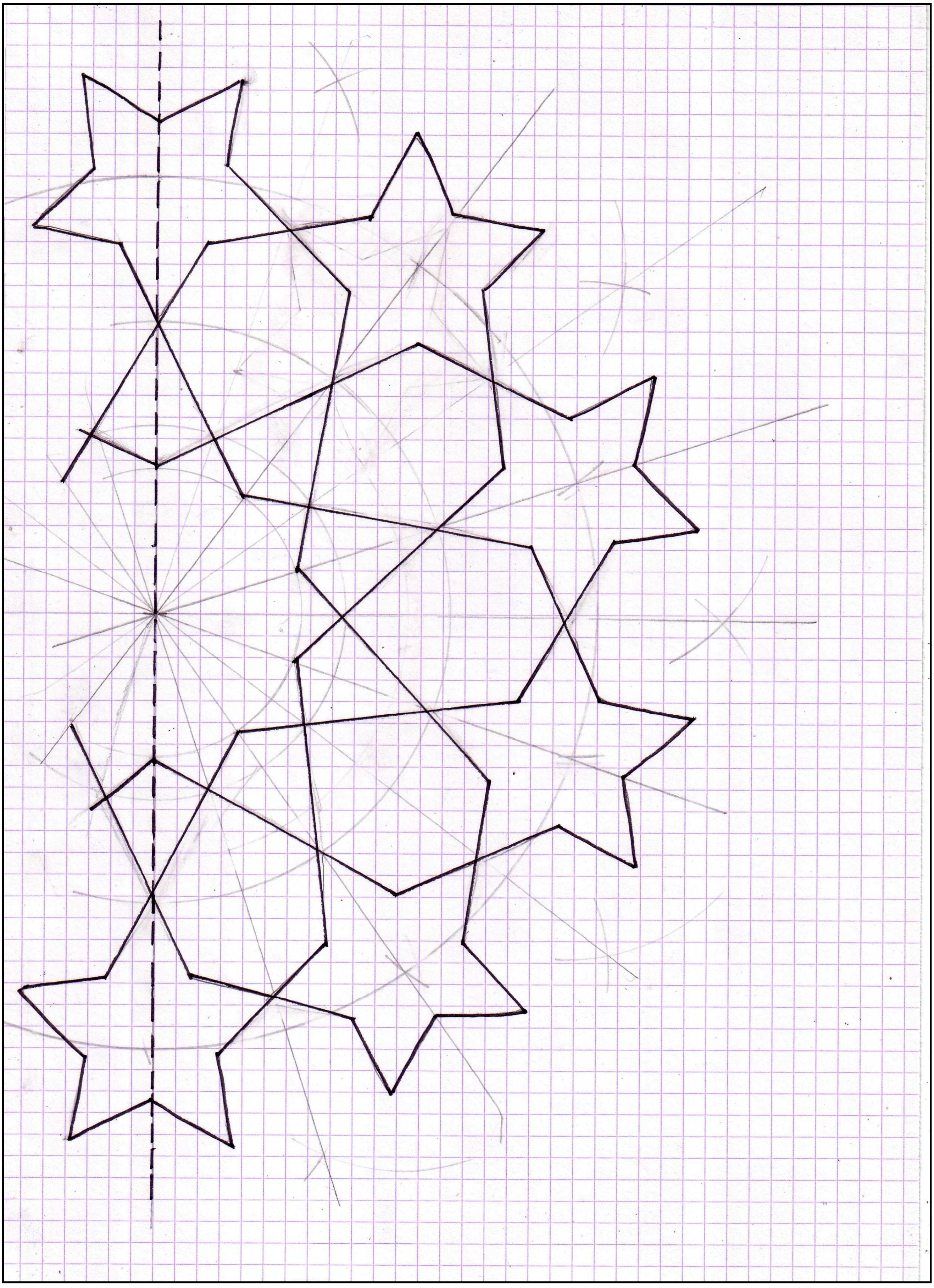
Module de base et composition de ces sur-modules.



La disposition en couronne de dix sur-modules formés par dix pentagones d'or génère une étoile à vingt.

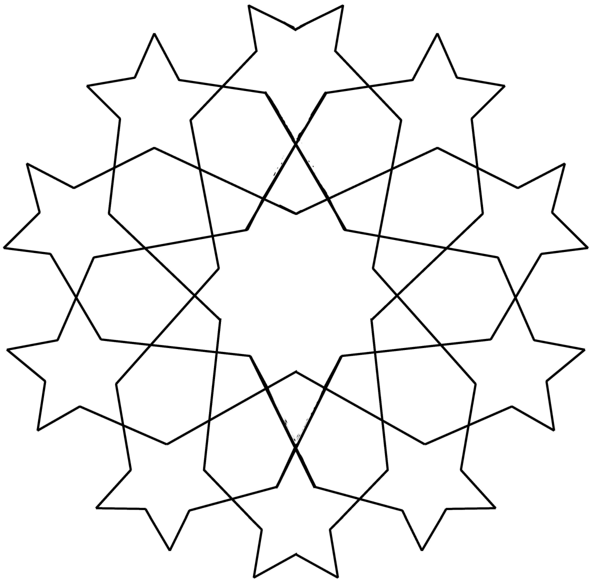


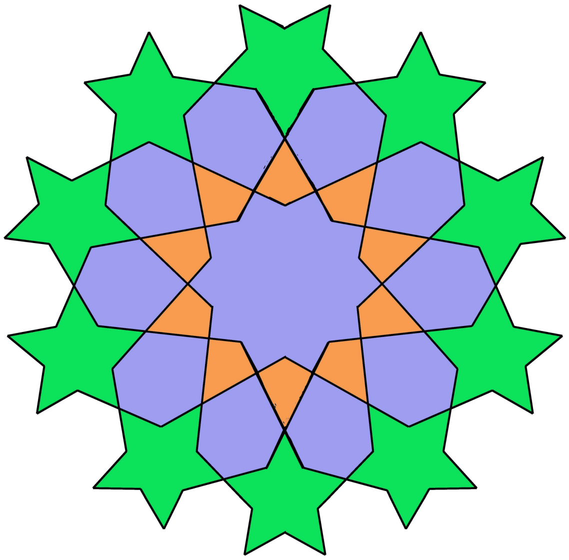
- Les étoiles à dix ont pour satellites des pentagones équilatéraux :



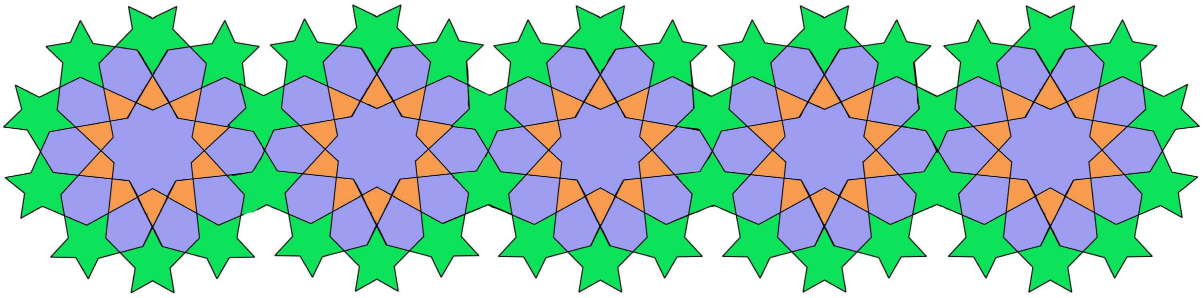
Tympan du pistach de la médersa Mir-I-Arab à Boukhara.

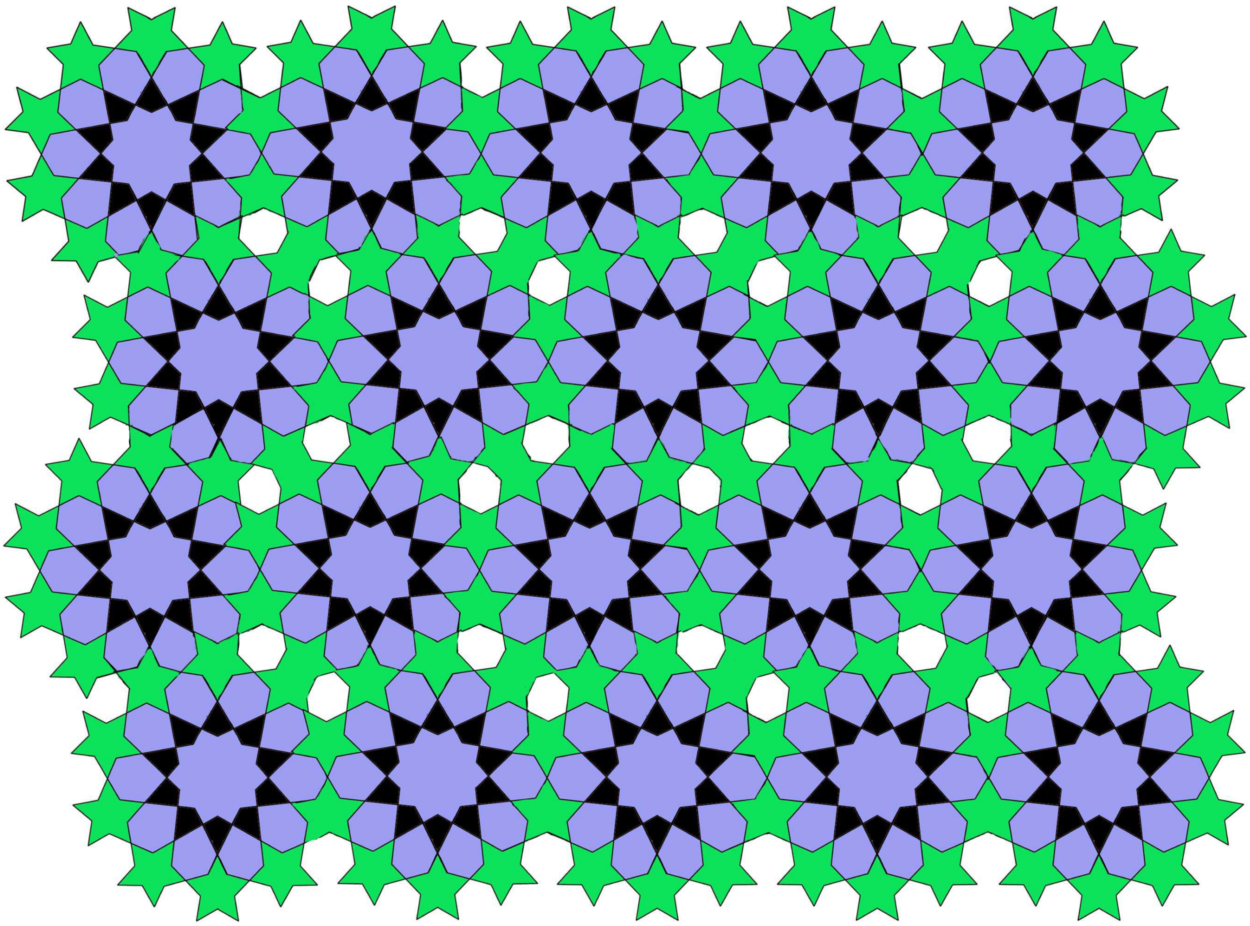
Panneau de l’iwan de la mosquée Bibi Kanun à Samarcande.

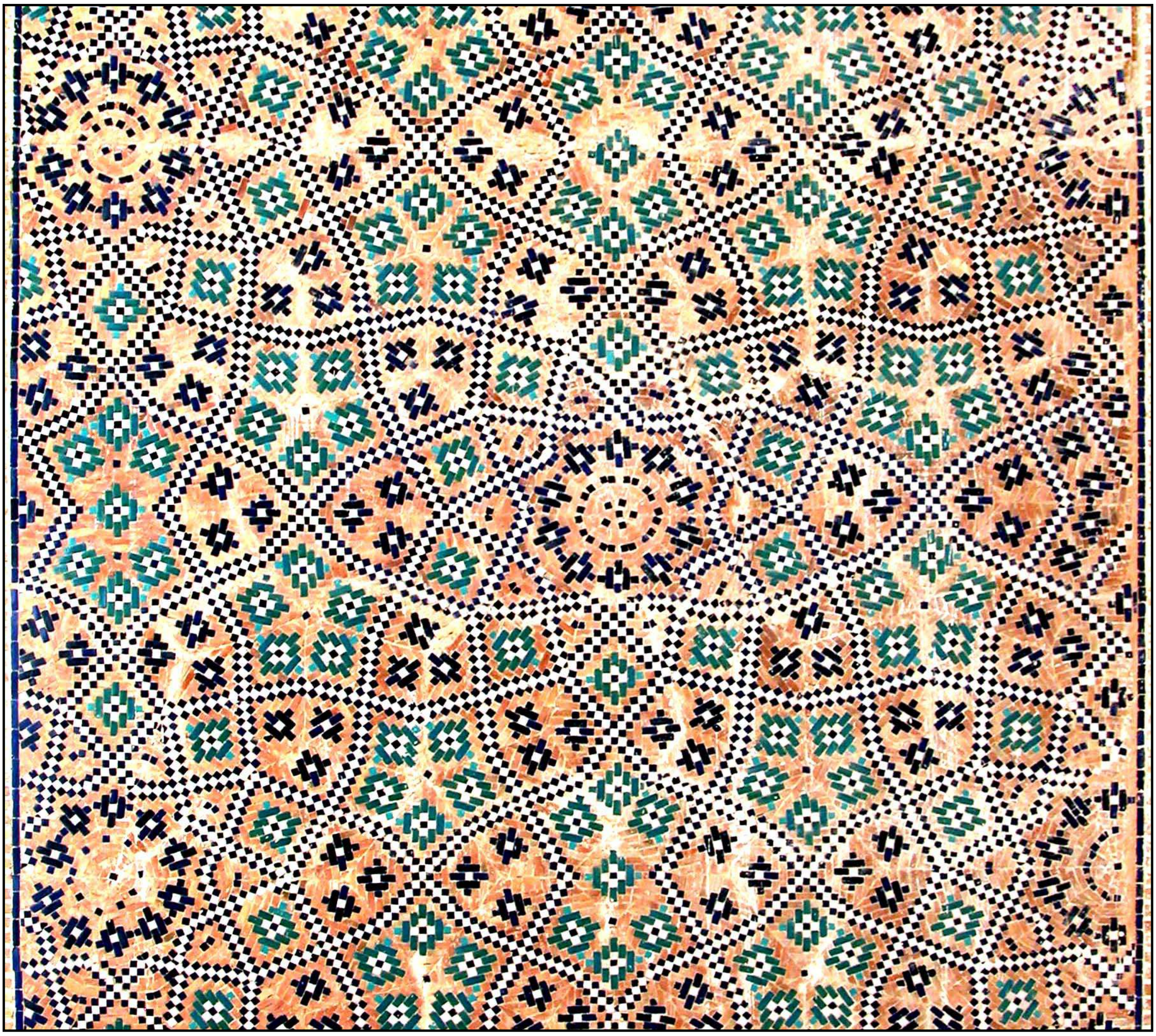




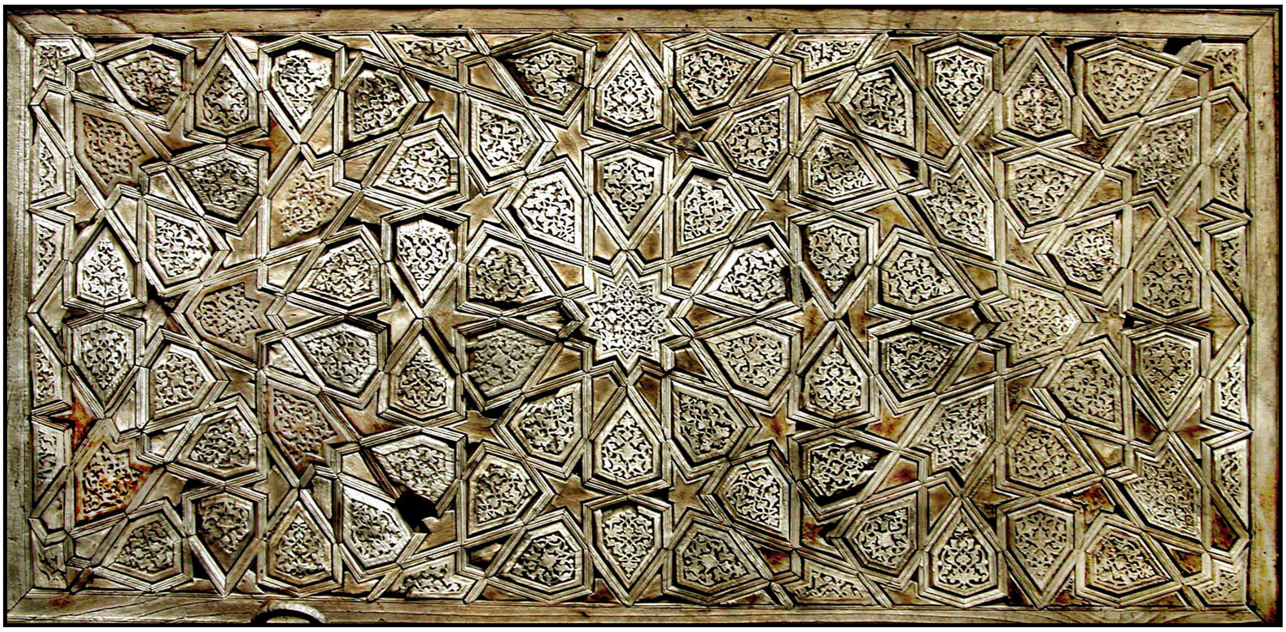
Sur-modules utilisés :







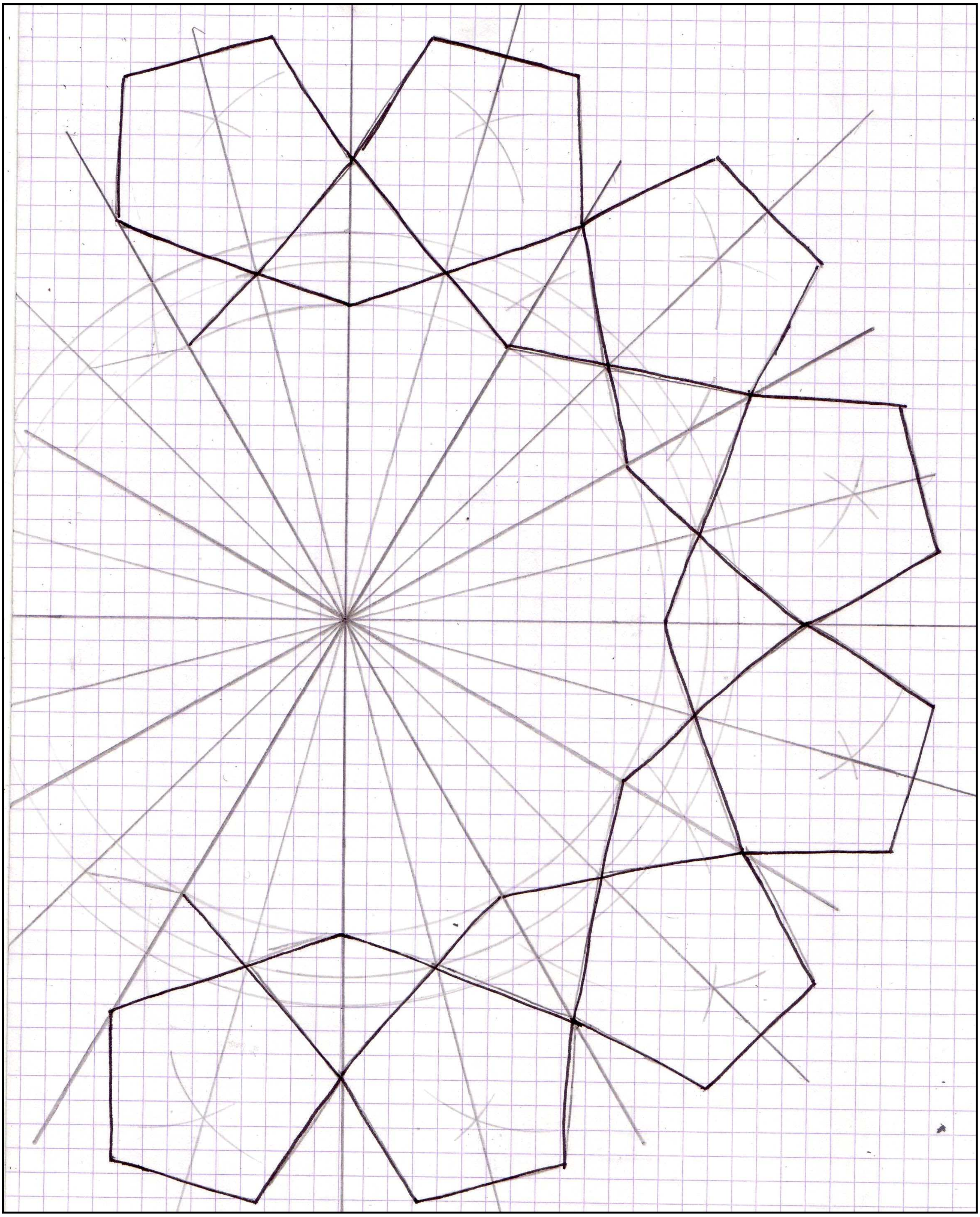
Iwan d’entrée de la médersa Oulough Begh à Boukhara.

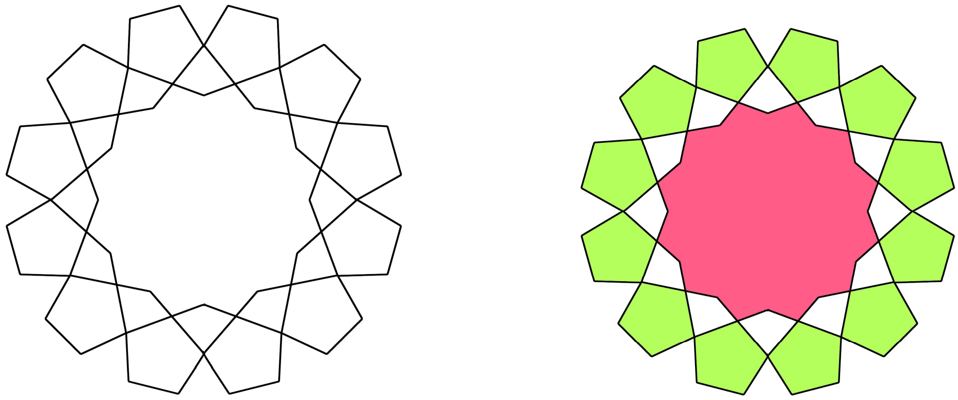


Couronne de pentagones étoilés d’un panneau de porte de la médersa Koukeldash à Boukhara.

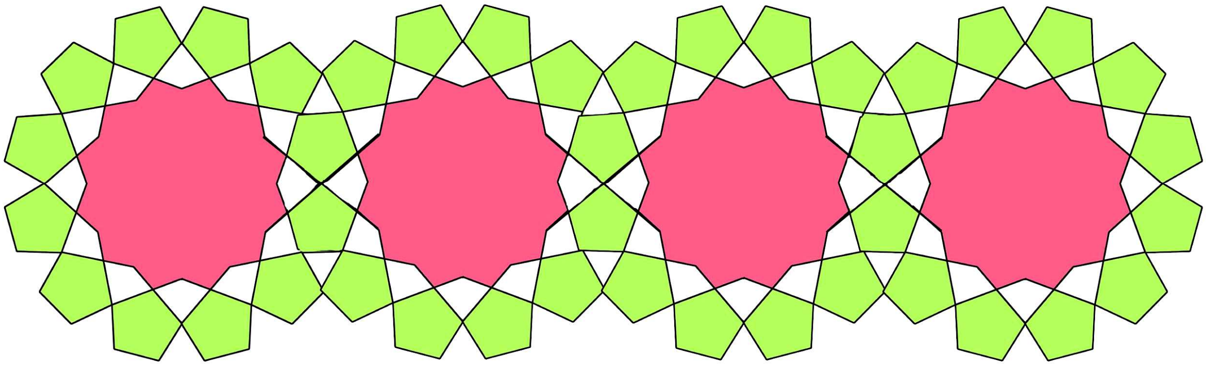
L’étoile à douze :

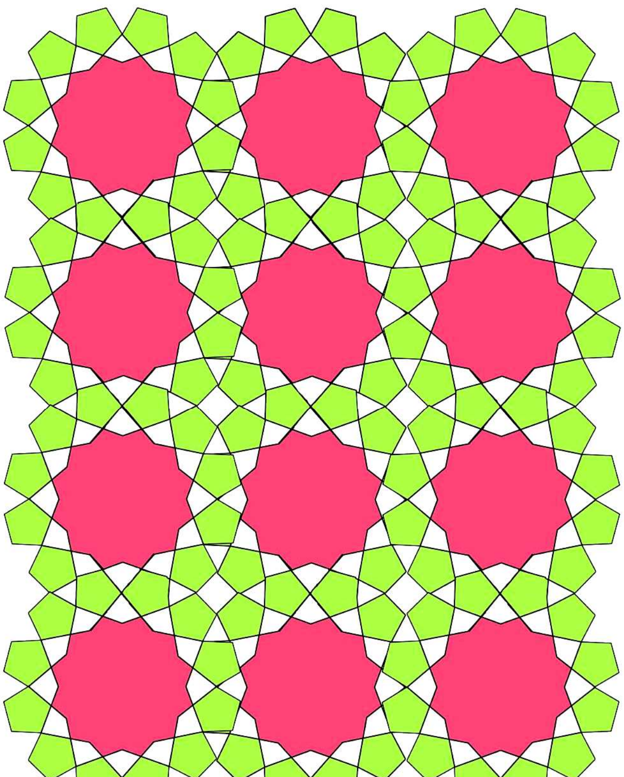
- Les étoiles à douze sont construites avec des pentagones convexes :

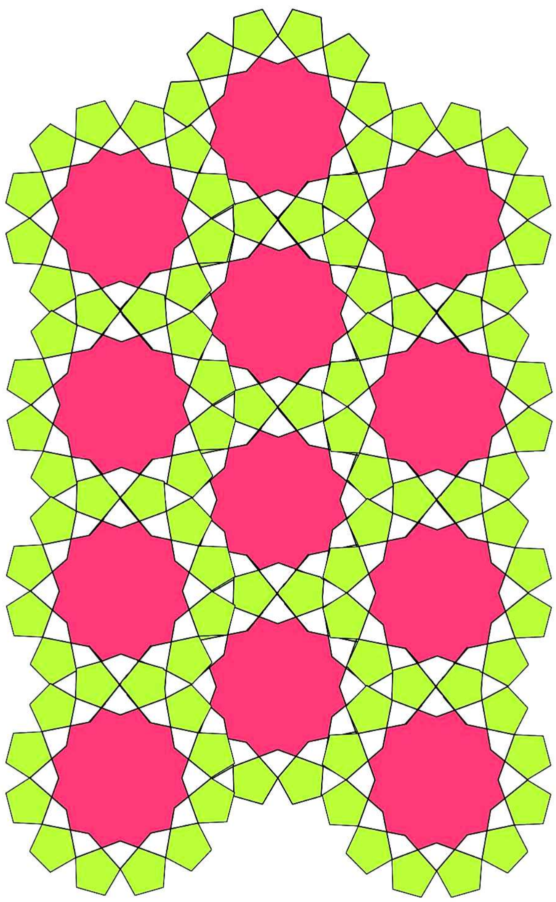




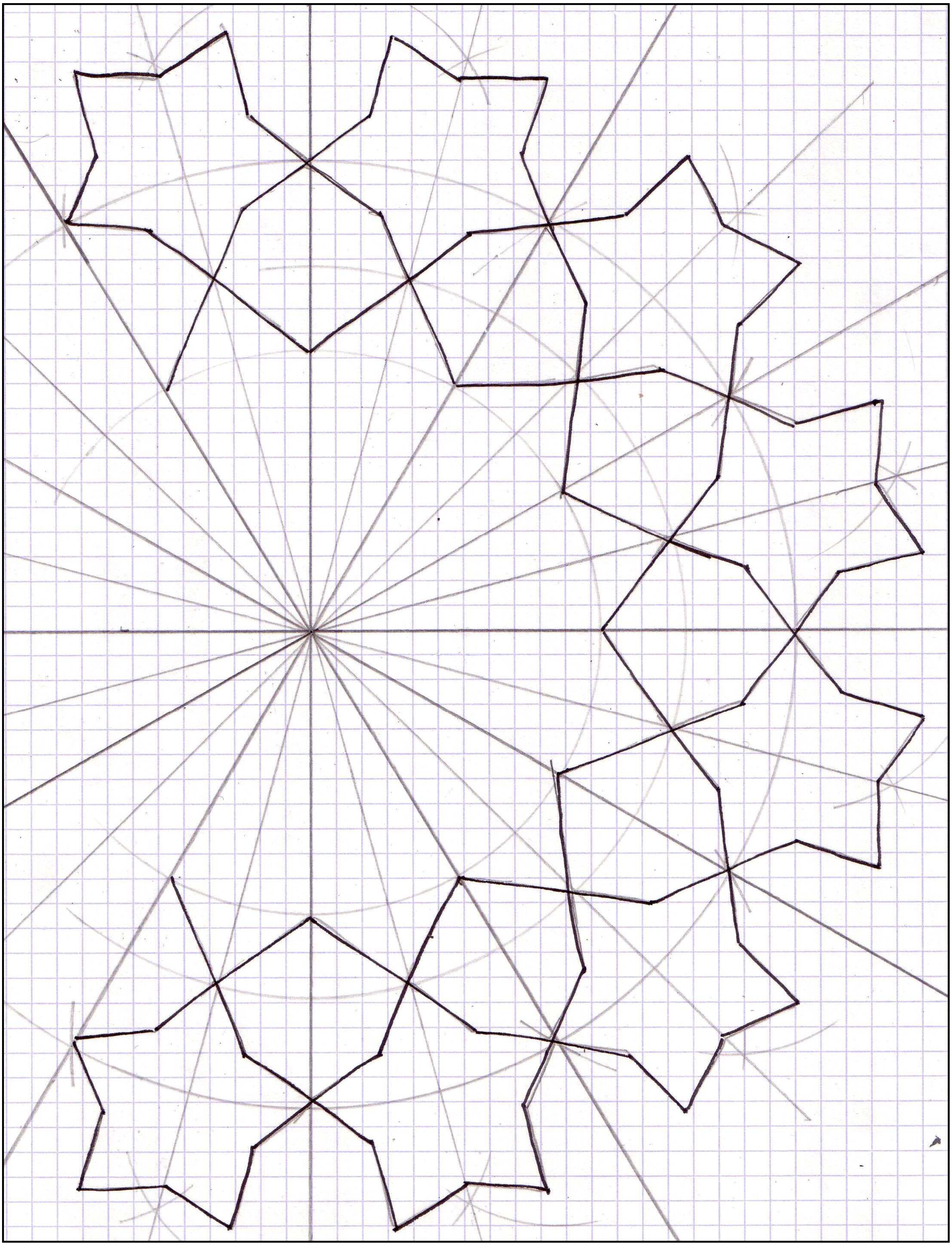
Sur-modules utilisés

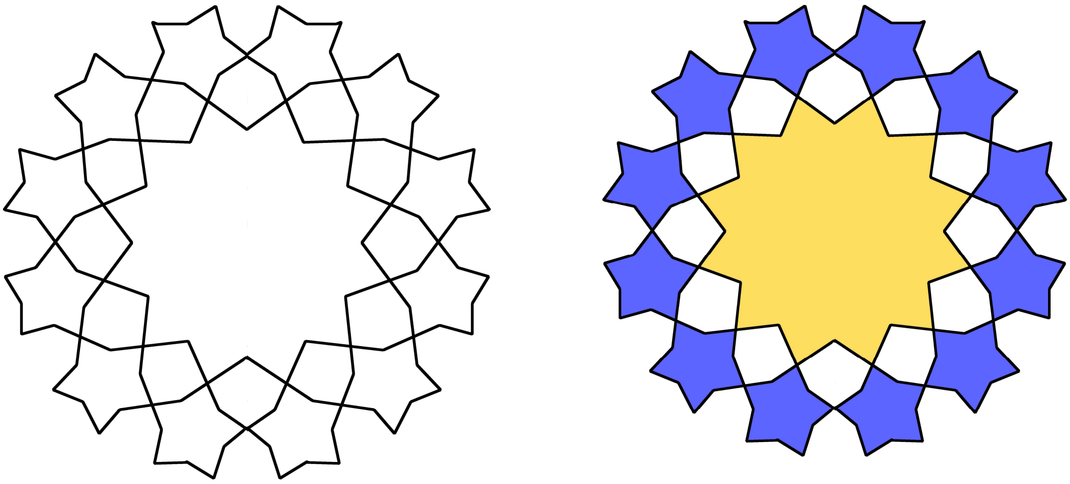




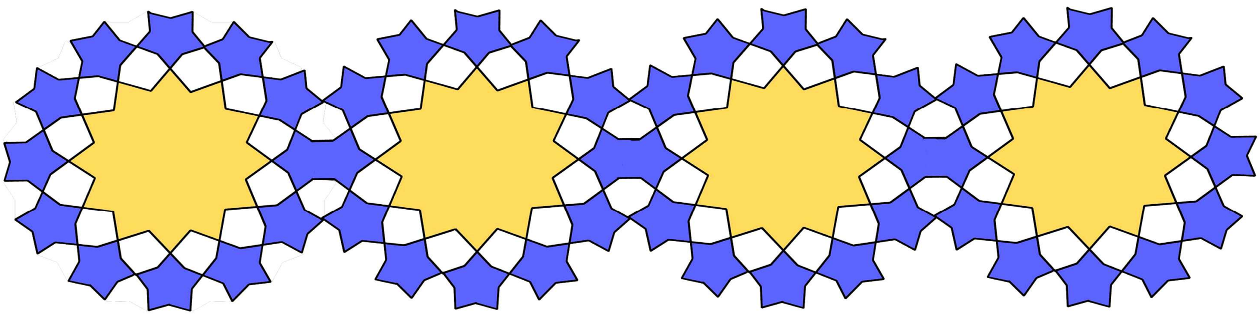


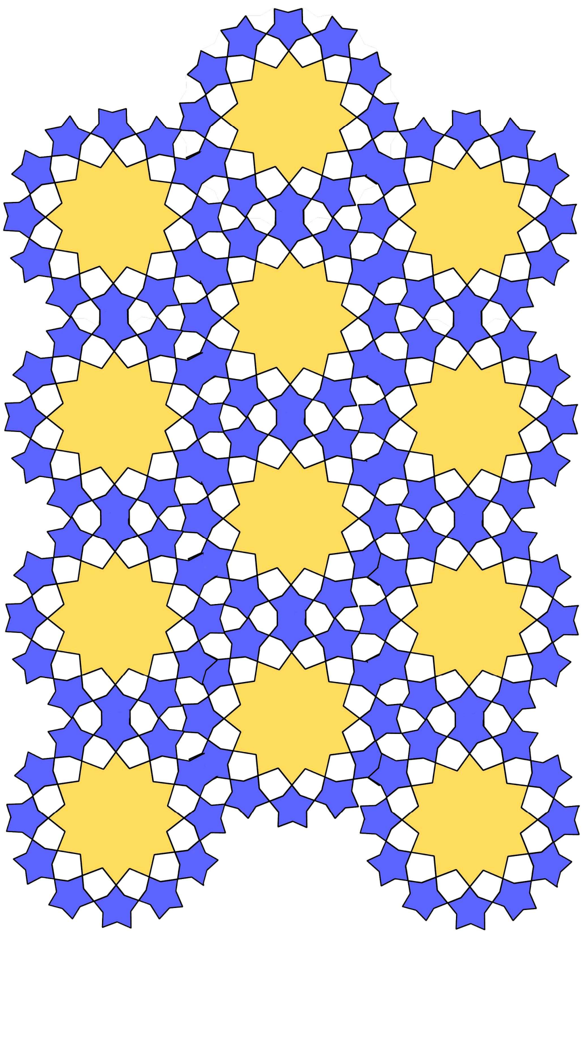
- Étoile à douze construite avec des pentagones d'or :

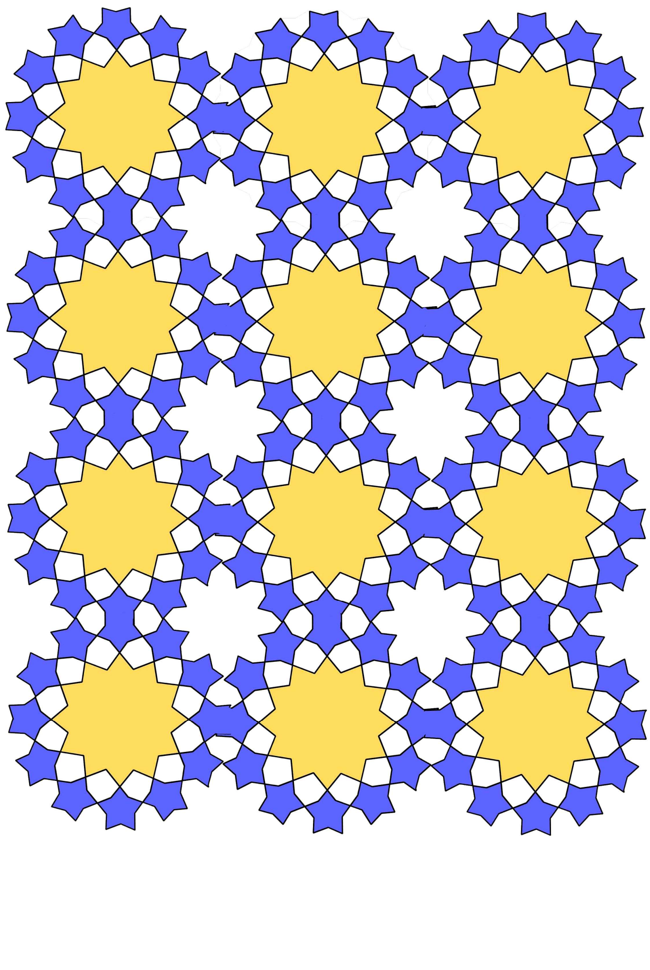




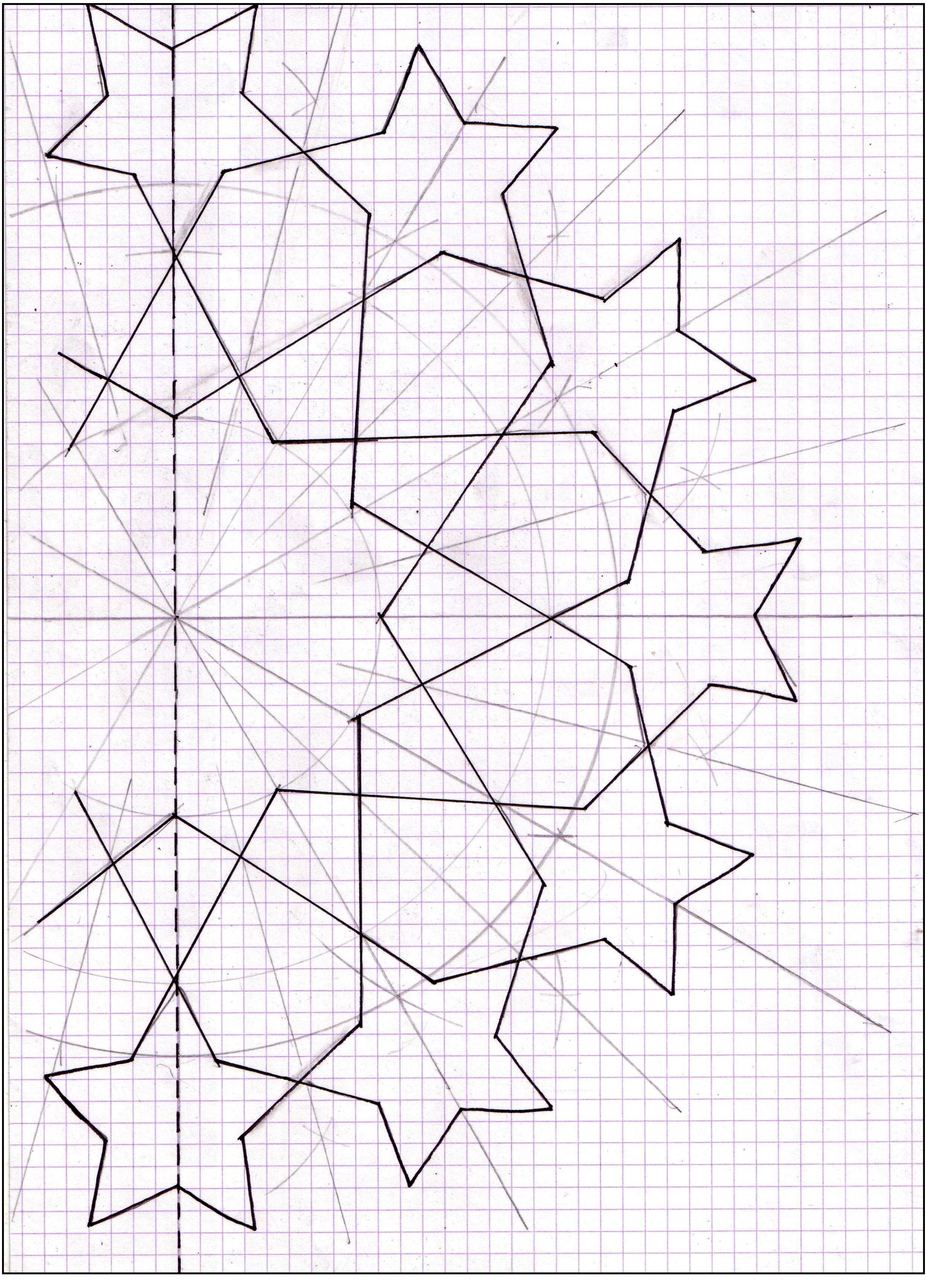
Sur-modules utilisés



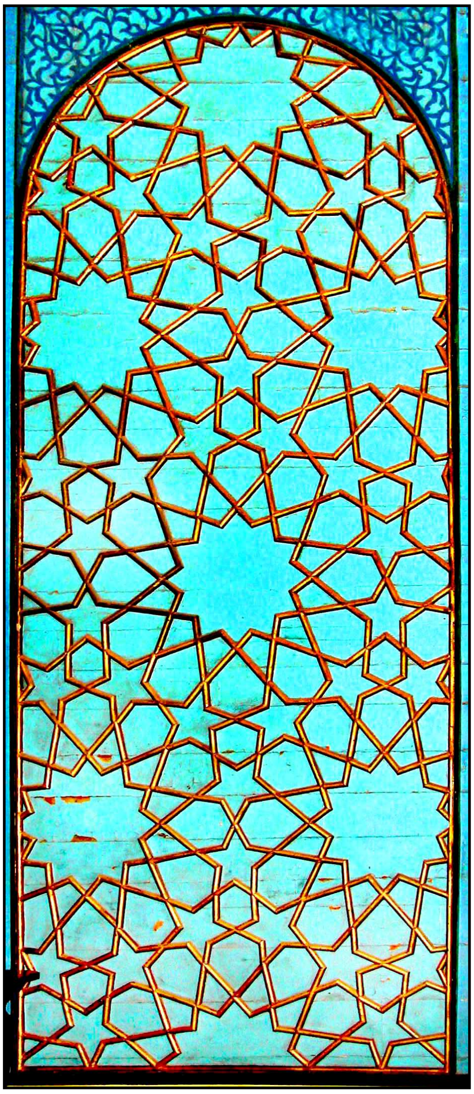


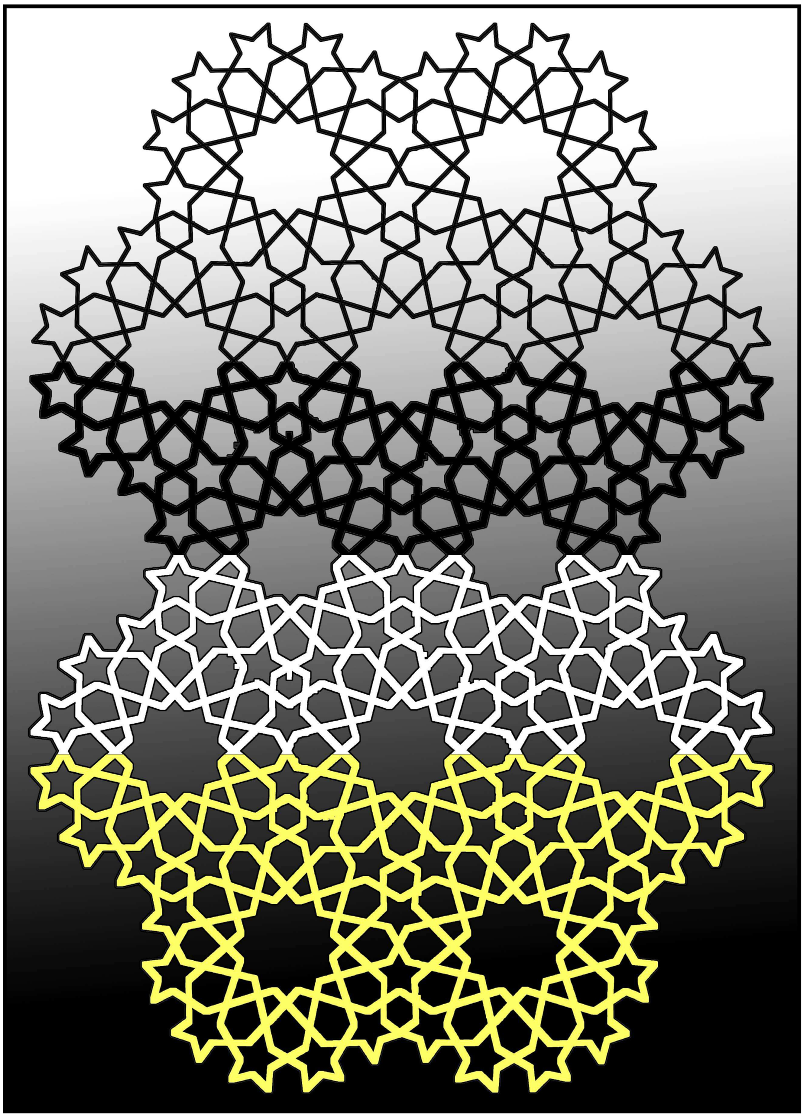


- Étoile à douze construite avec des pentagones équilatères.

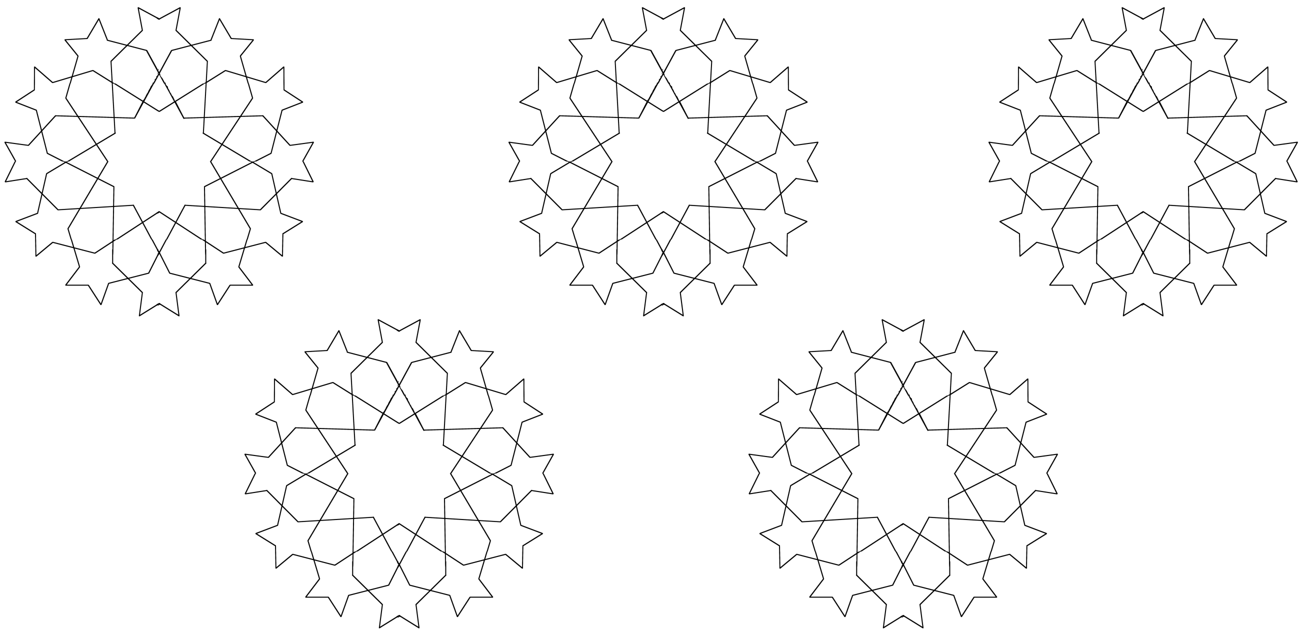


Composition en quinconce d’étoiles à douze.

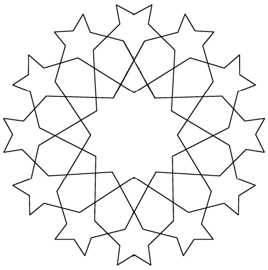


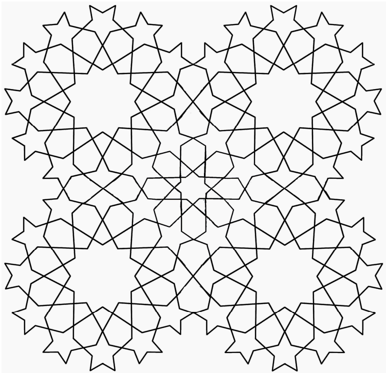


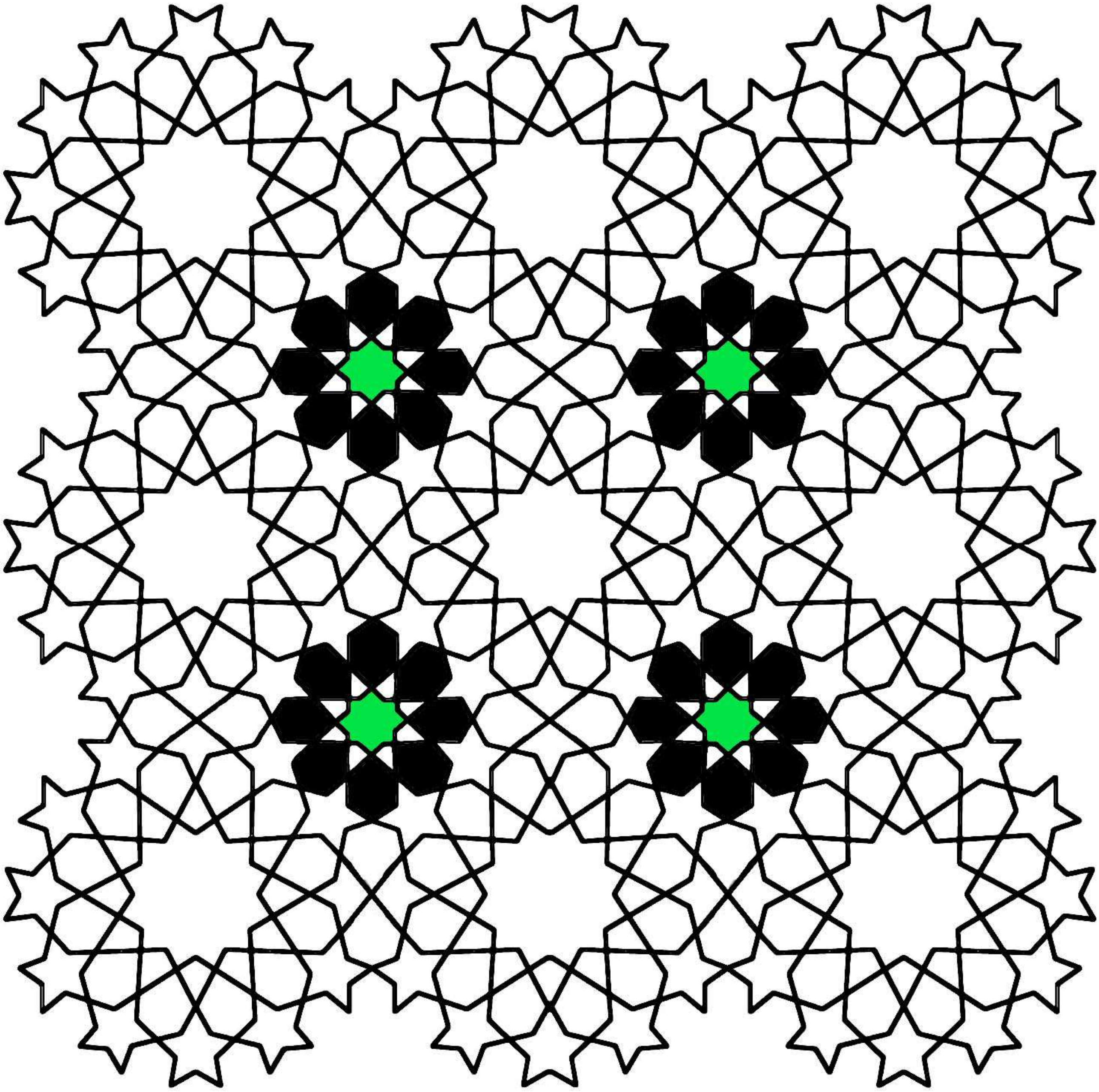
Panneau de bois peint au palais de la lune et des étoiles à Boukhara.



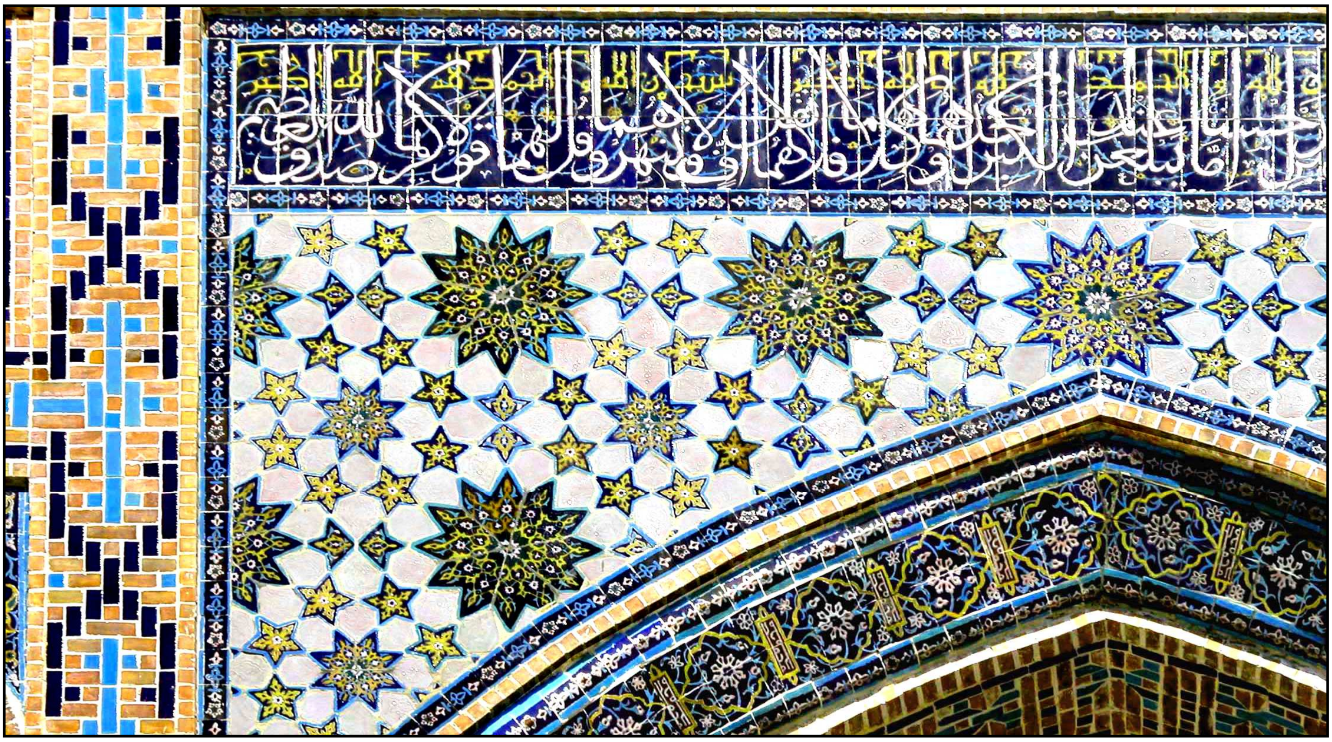
Composition en carré de quatre étoiles à douze :



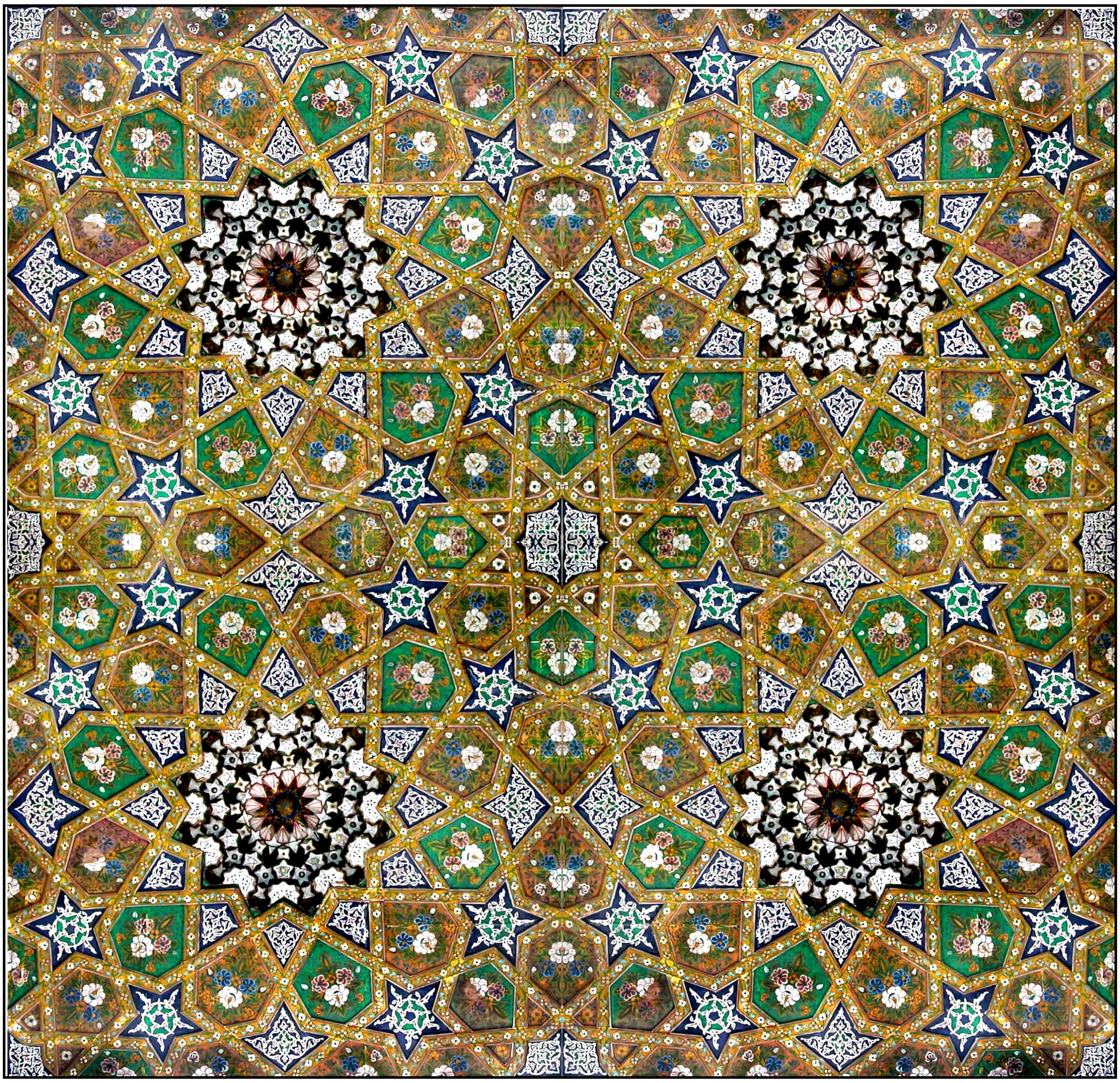




La composition orthogonale de quatre étoiles à douze donne une étoile à huit.



Alfiz du pistach du mausolée de Kazy Zade Roumi à Shah-I-Zinda.



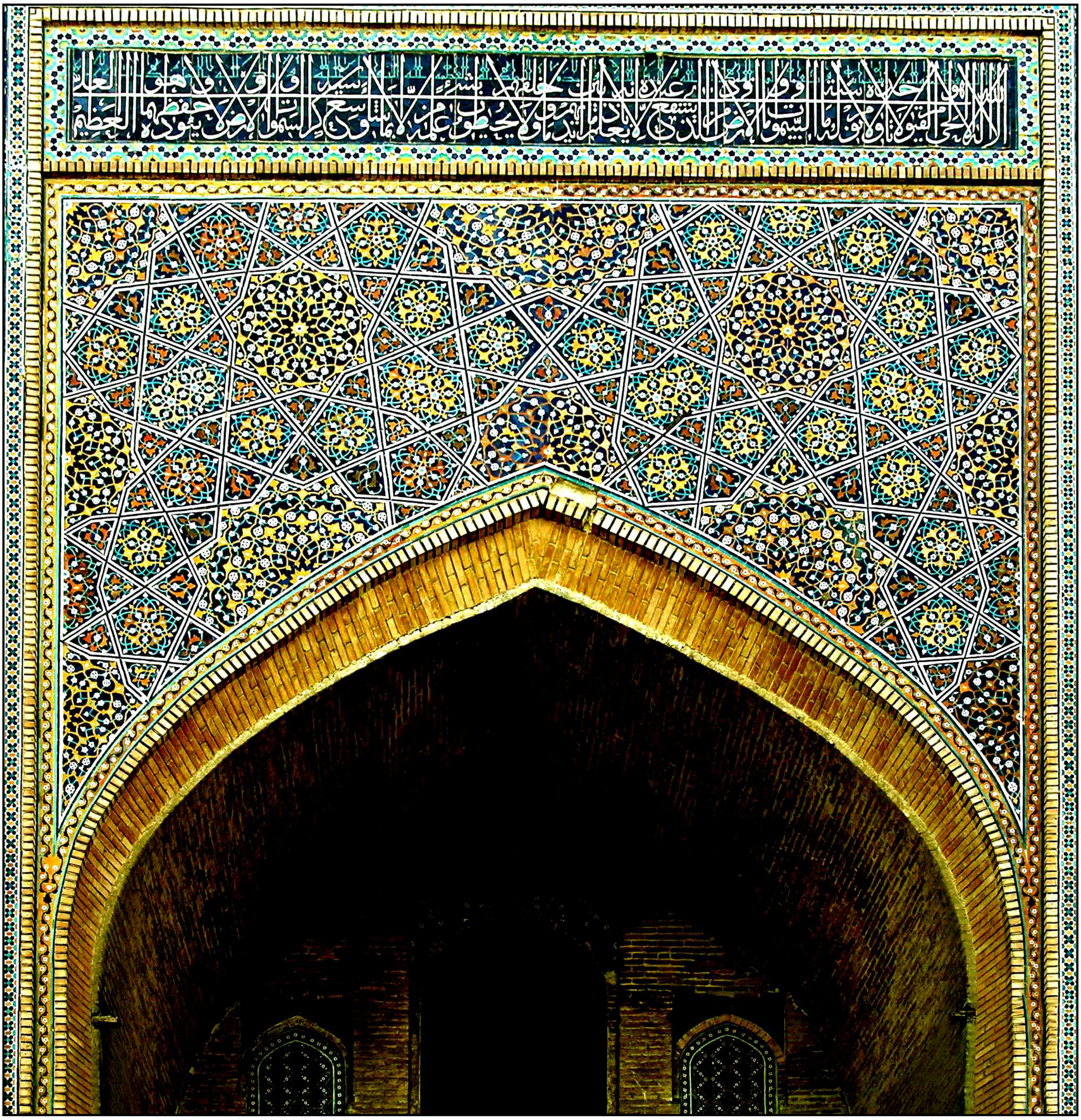
Plafond du mausolée de Baha-Al Din près de Boukhara.

Entrée de la nécropole de Shah-I-Zinda

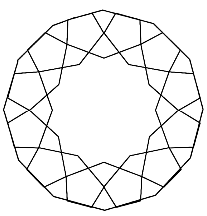
Plafond du mausolée de Baha-Al Din à Boukhara.

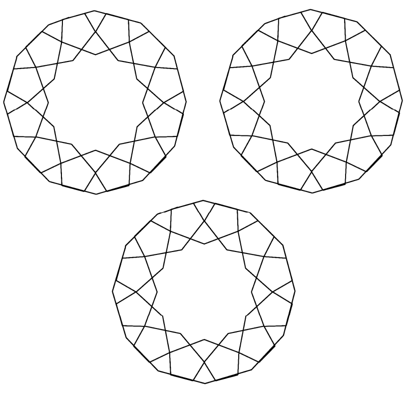
Détail du pistach d'entrée.

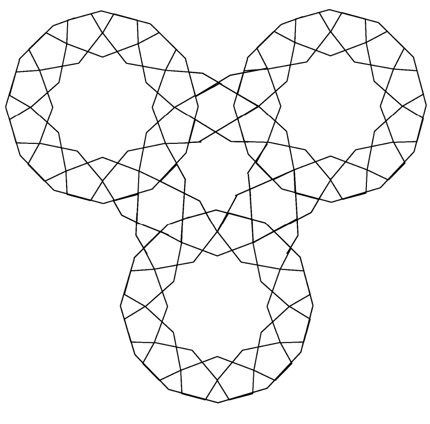
Composition de trois étoiles à douze.

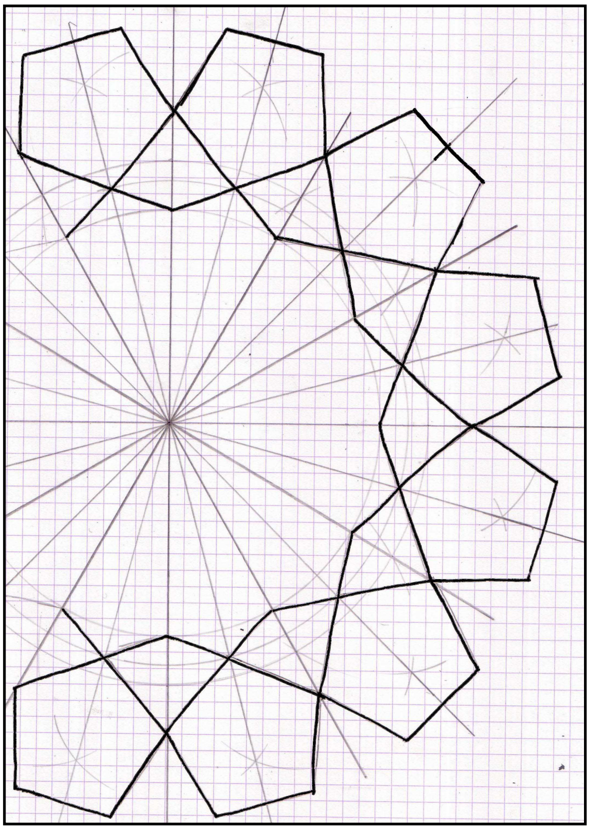


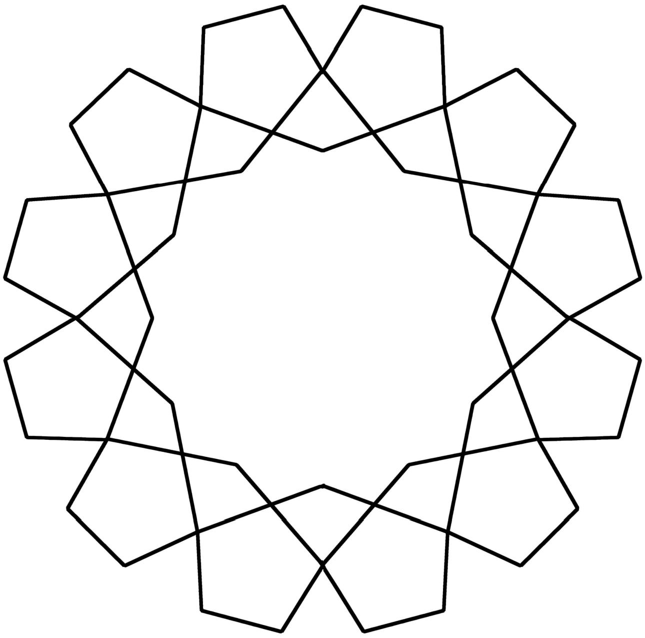
Médersa Oulough Begh à Samarcande.

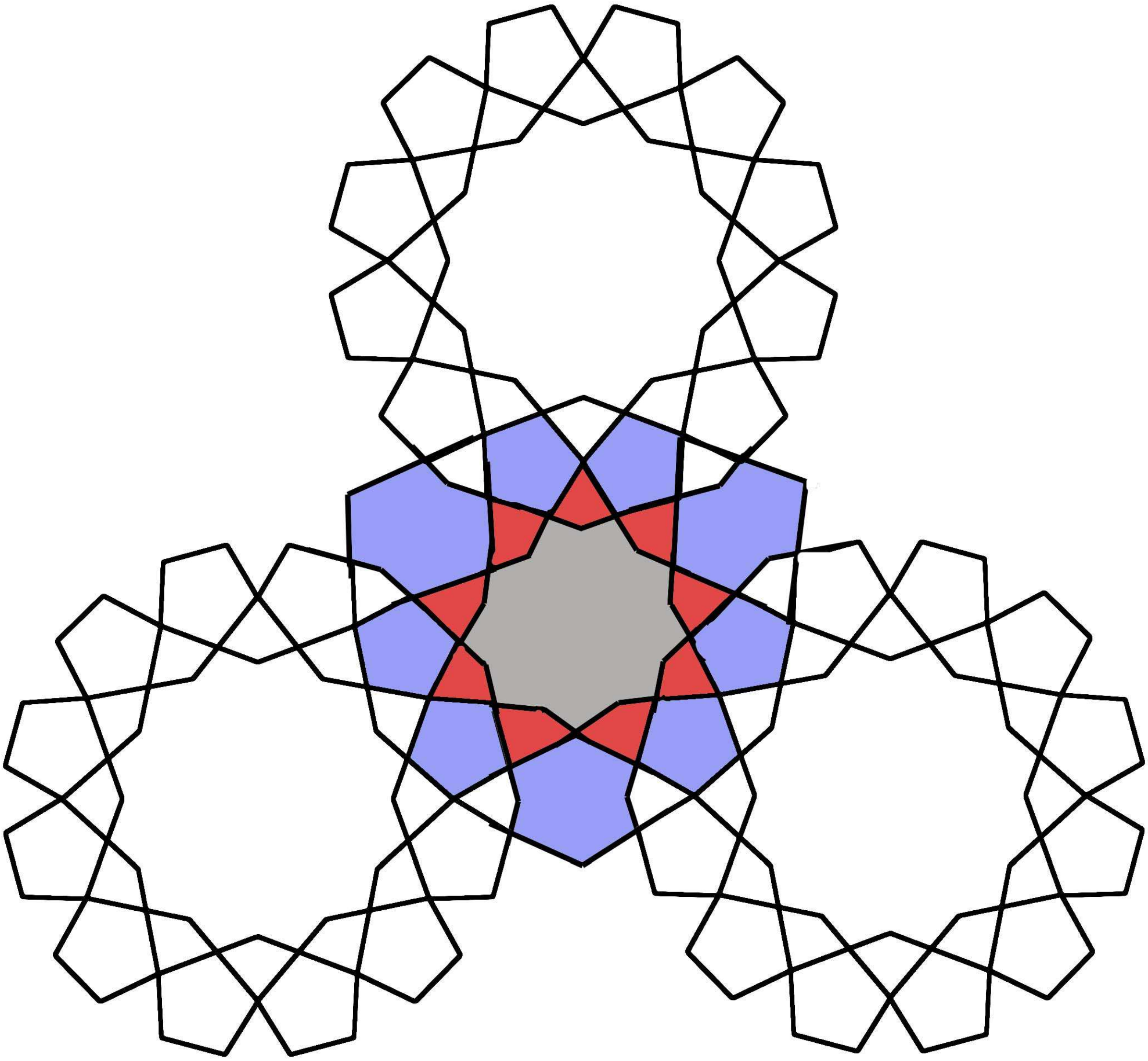




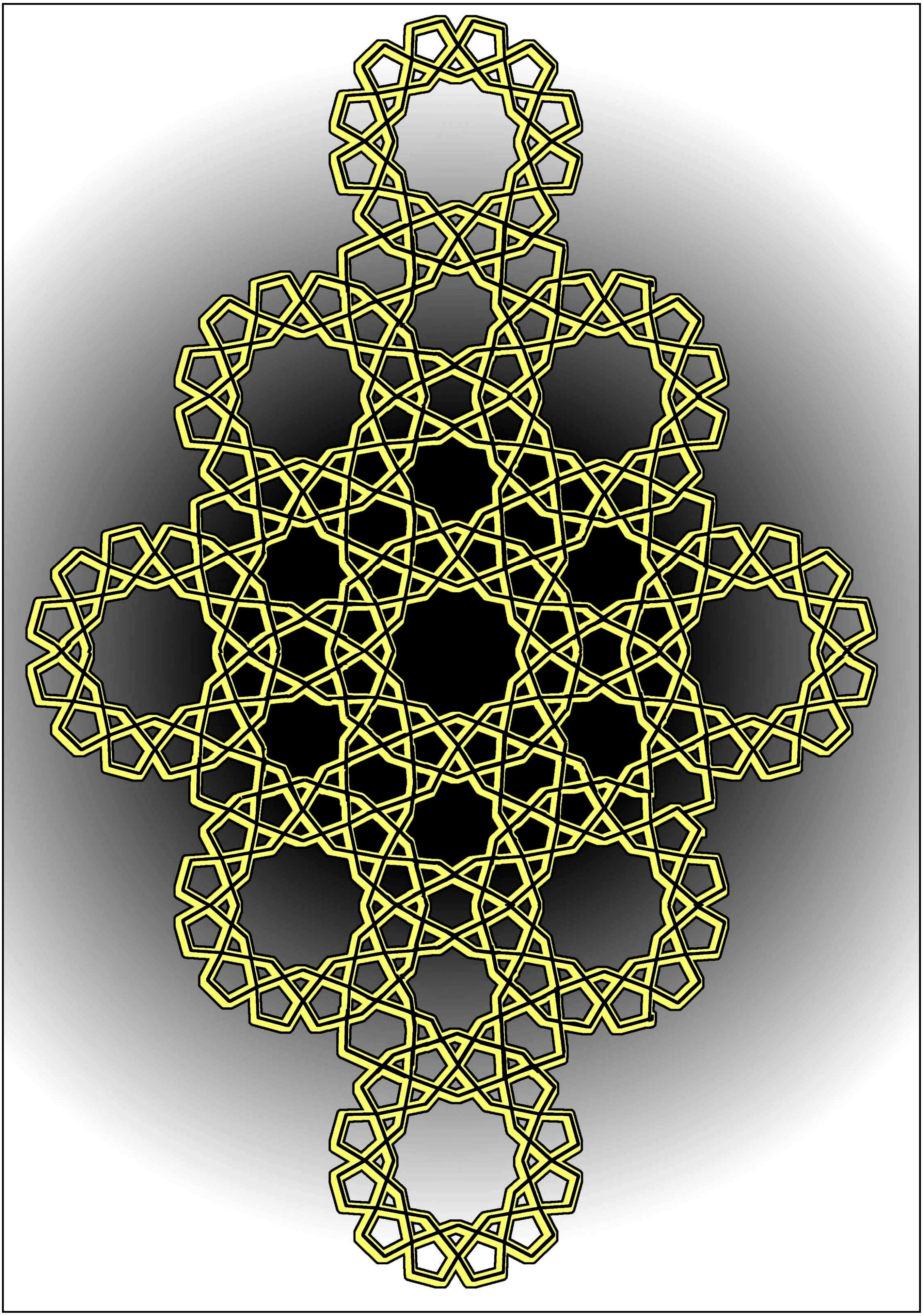


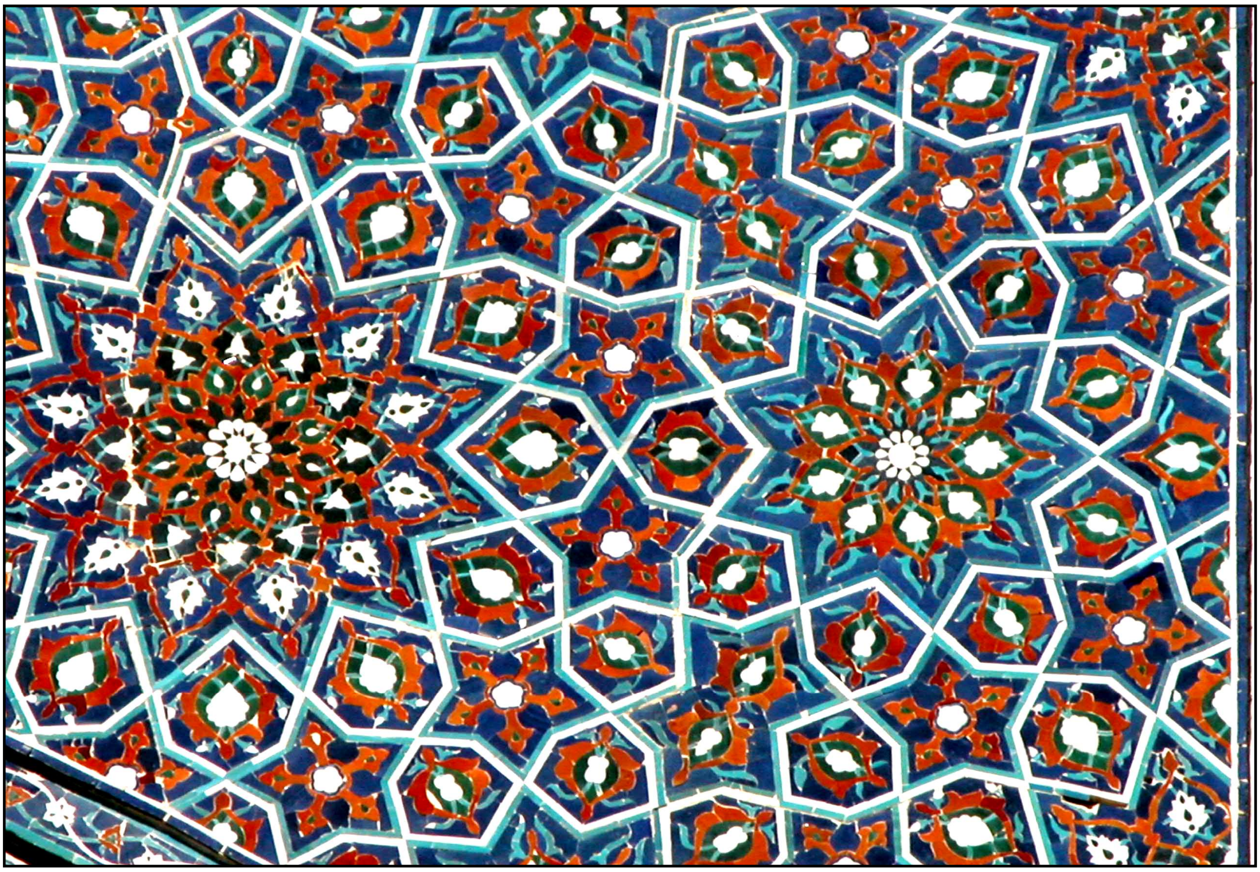




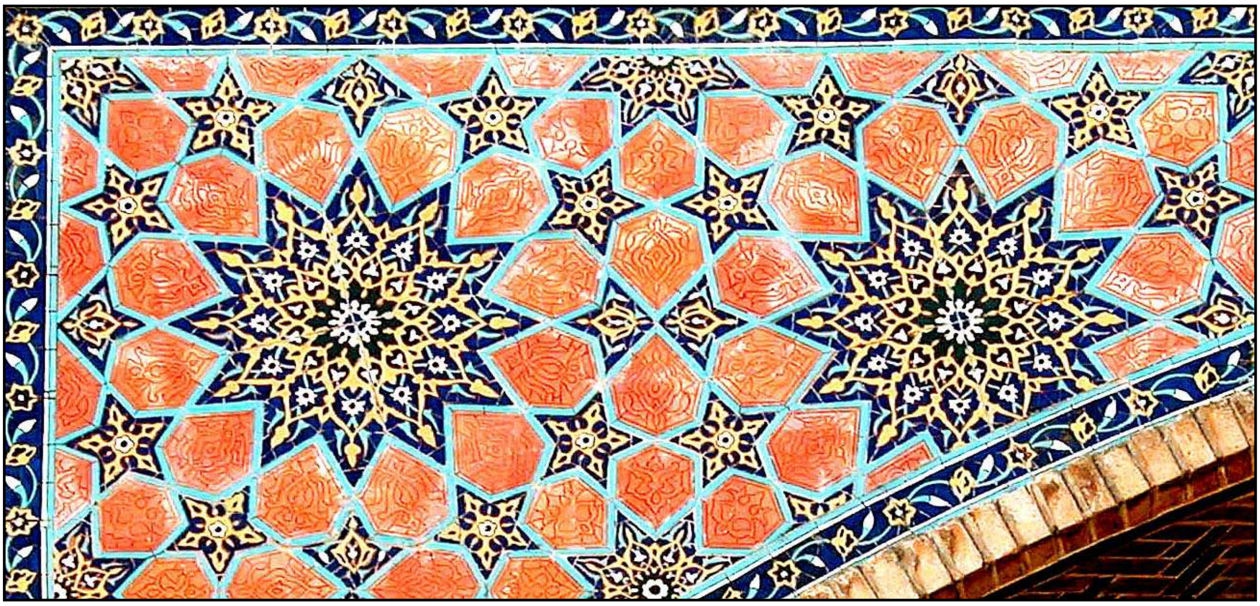


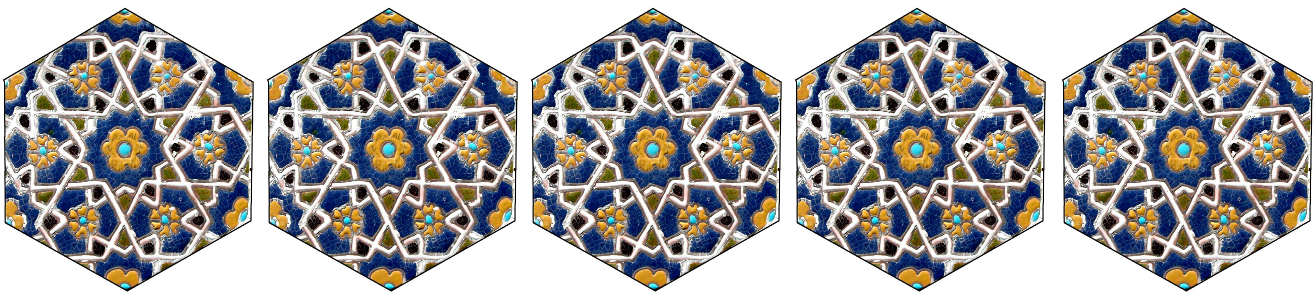
La composition de trois étoiles à douze génère une étoile à neuf.

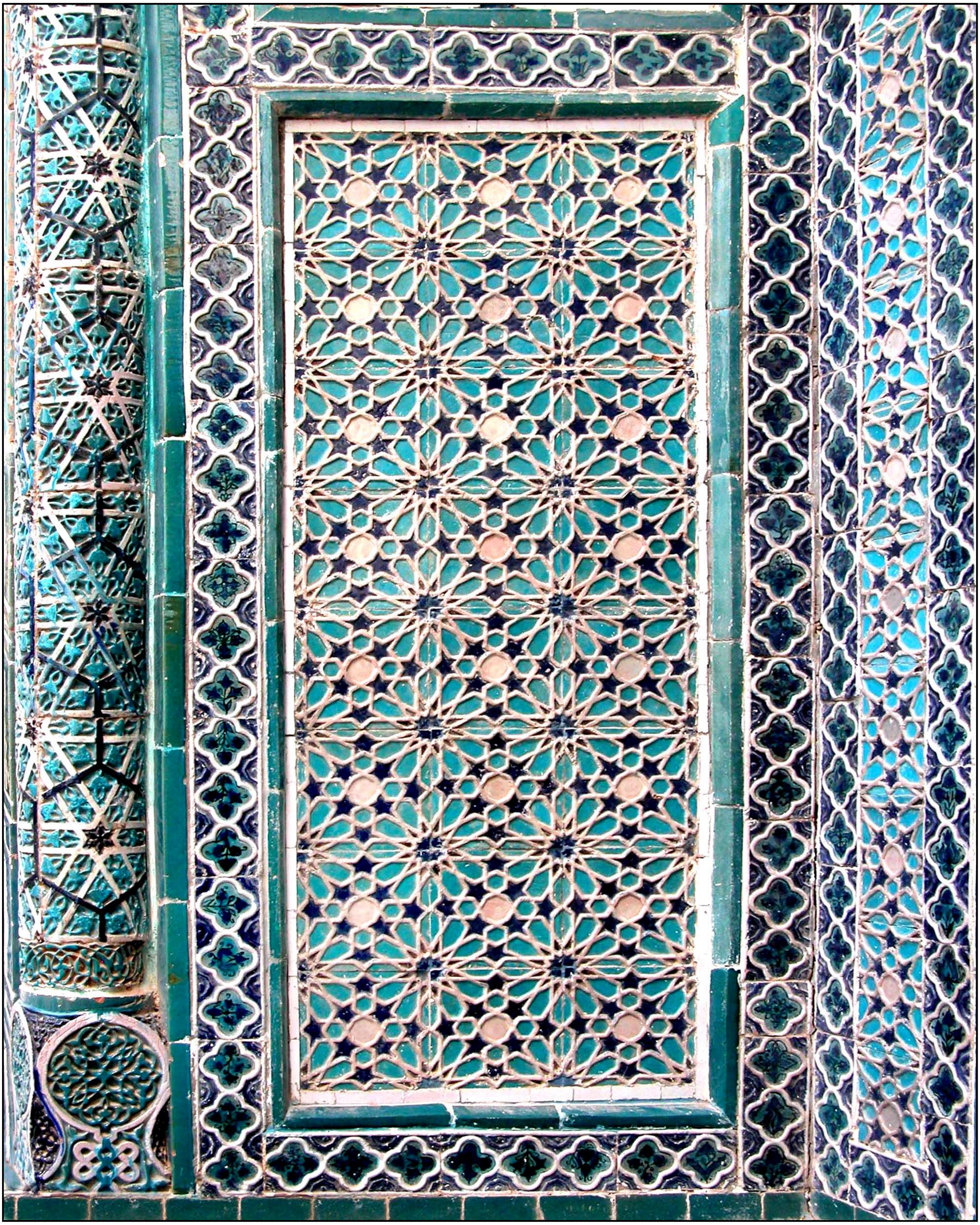




- *Alfiz de l'iwan de la Mosquée Tilla Kari à Samarcande.*
- *Alfiz à Shah-I-Zinda.*
- *Étoiles à douze obtenues avec des pentagones convexes irréguliers ; majoliques de Shah-I-Zinda.*

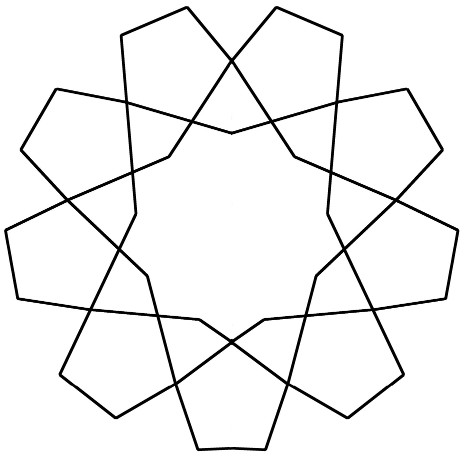


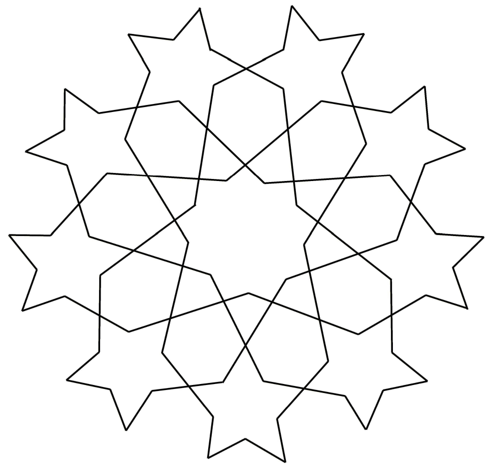


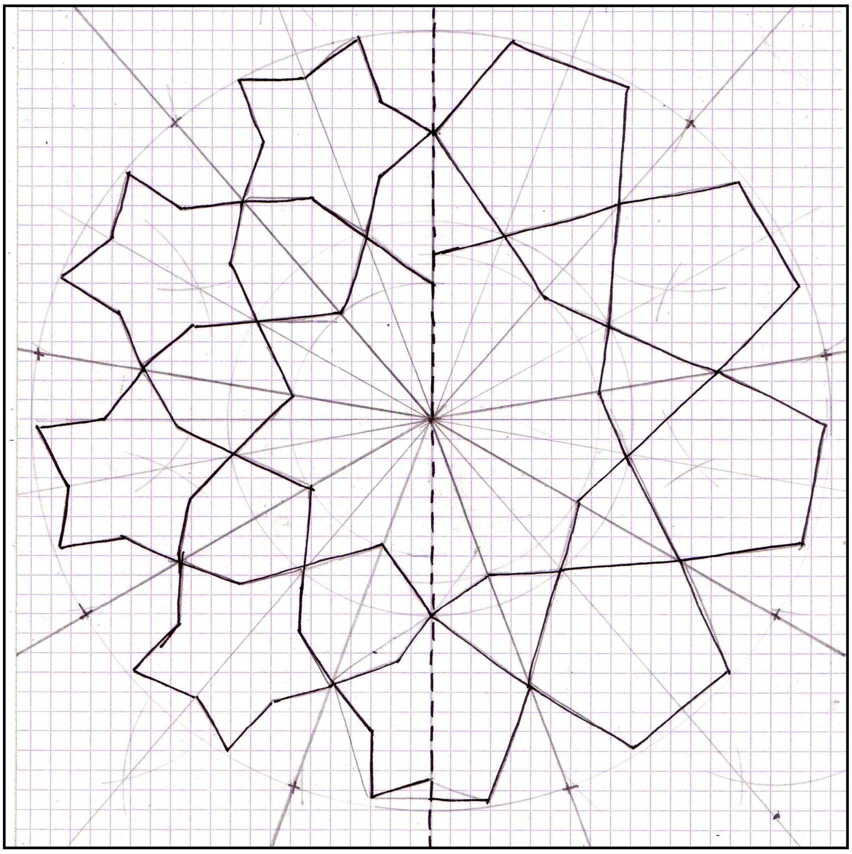


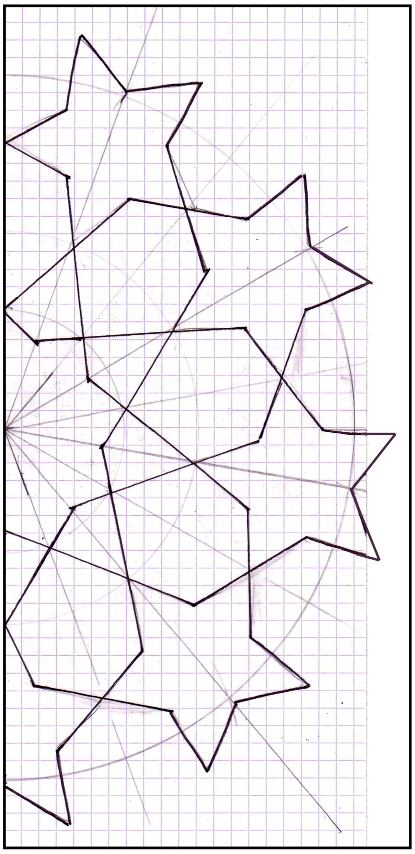
Majoliques ciselées du mausolée de Khodja Akhmad à Shah-I-Zinda.

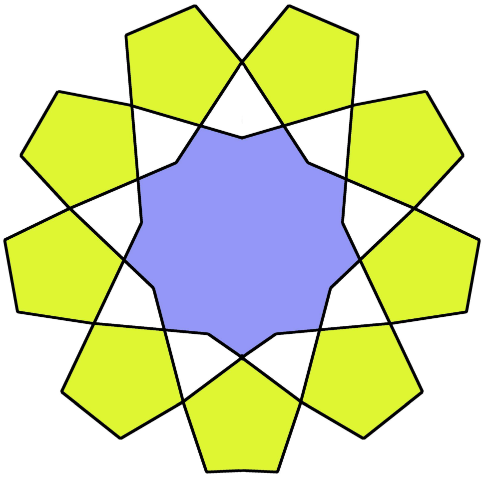
Etoiles à neuf :

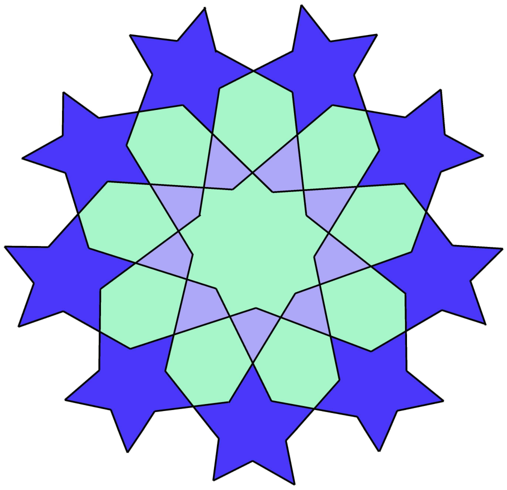


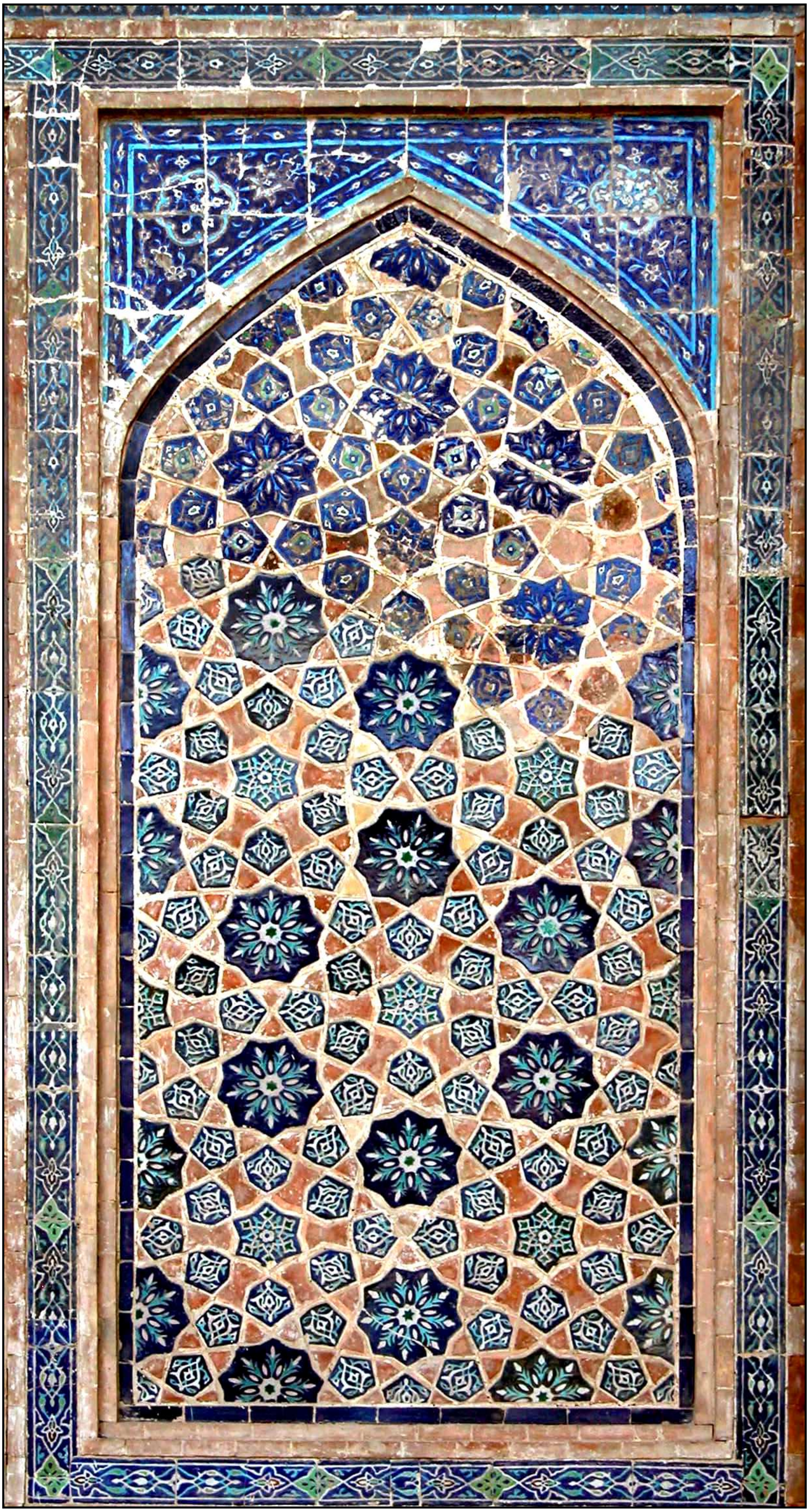






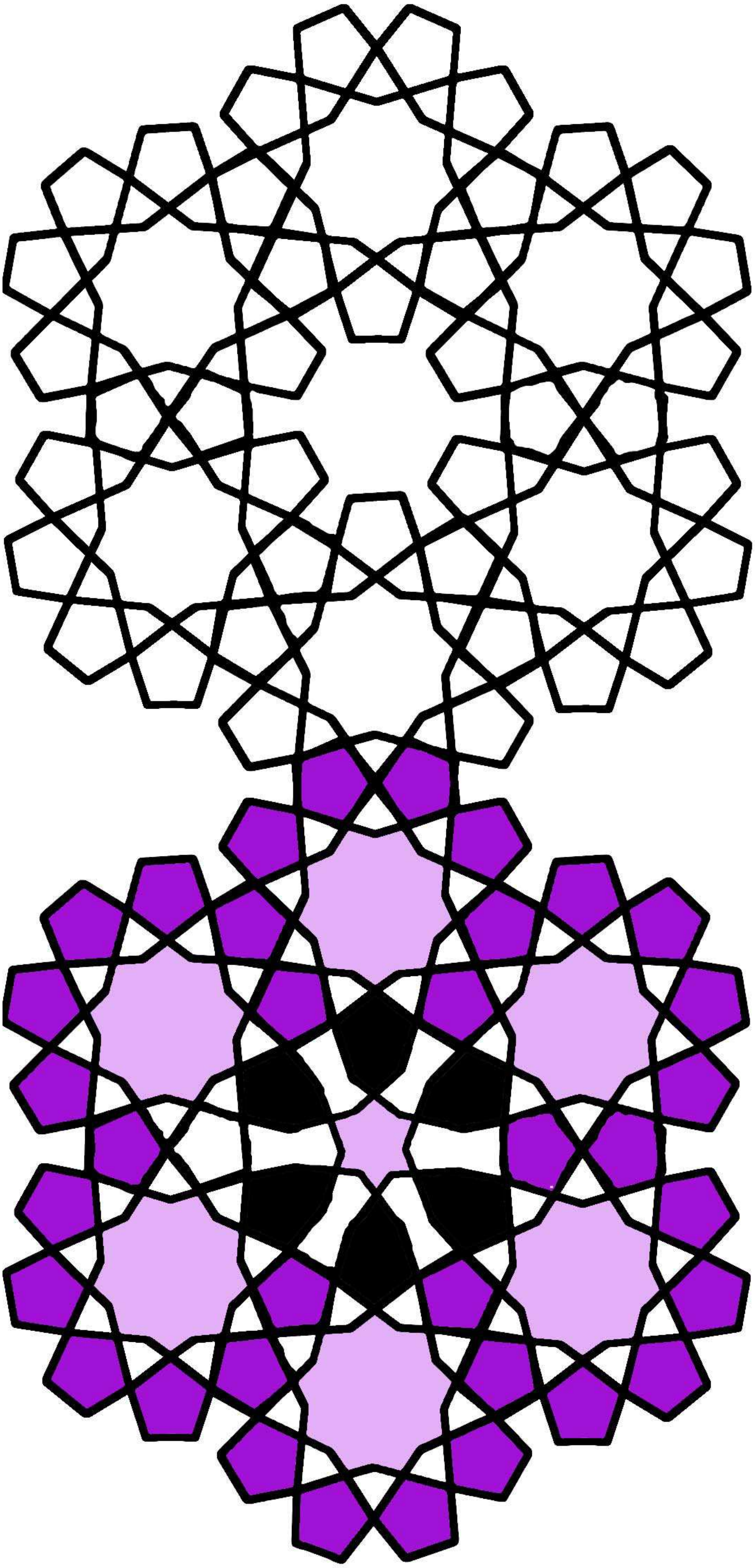




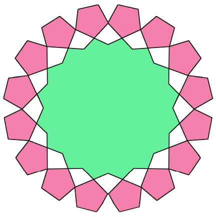


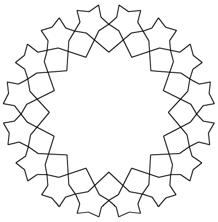
Étoiles à neuf de l'iwan de la médersa Oulough Begh au Registan.

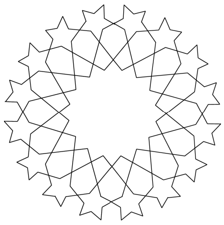
Composition convergente de six sur-modules à neuf, convergence obtenue par basculement de vingt degrés de chaque sur-module par rapport à son précédent. Le résultat compose une structure à six axes en son centre.

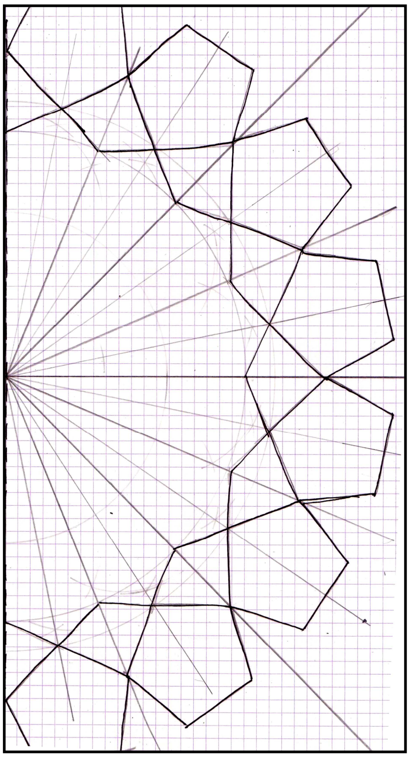


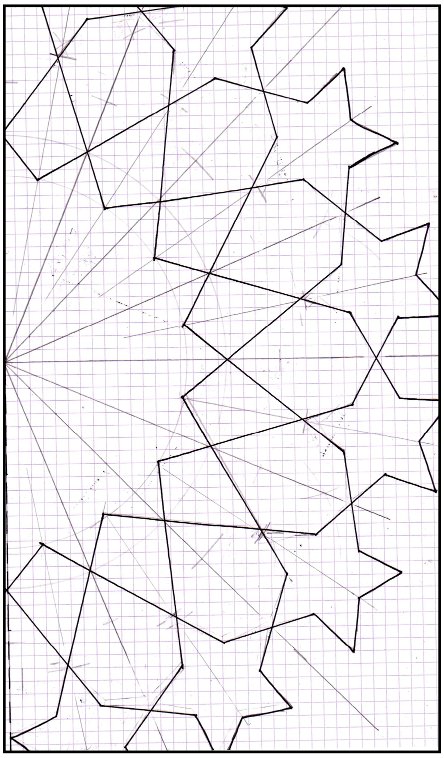
Etoiles à seize :

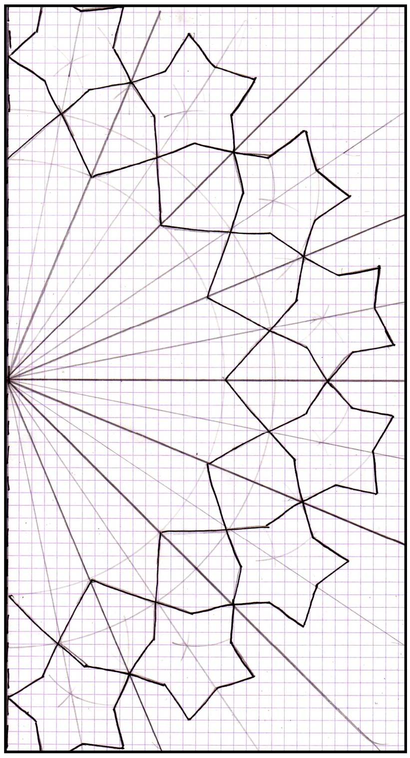


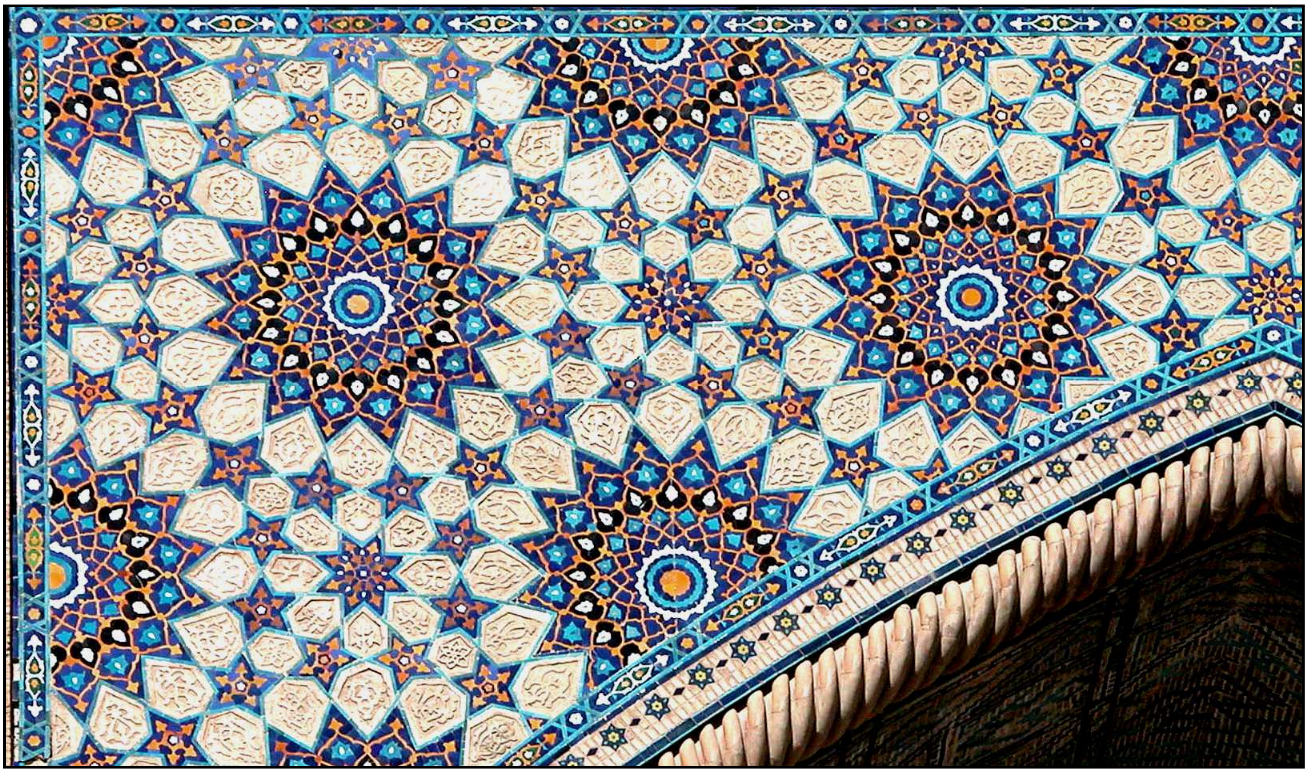




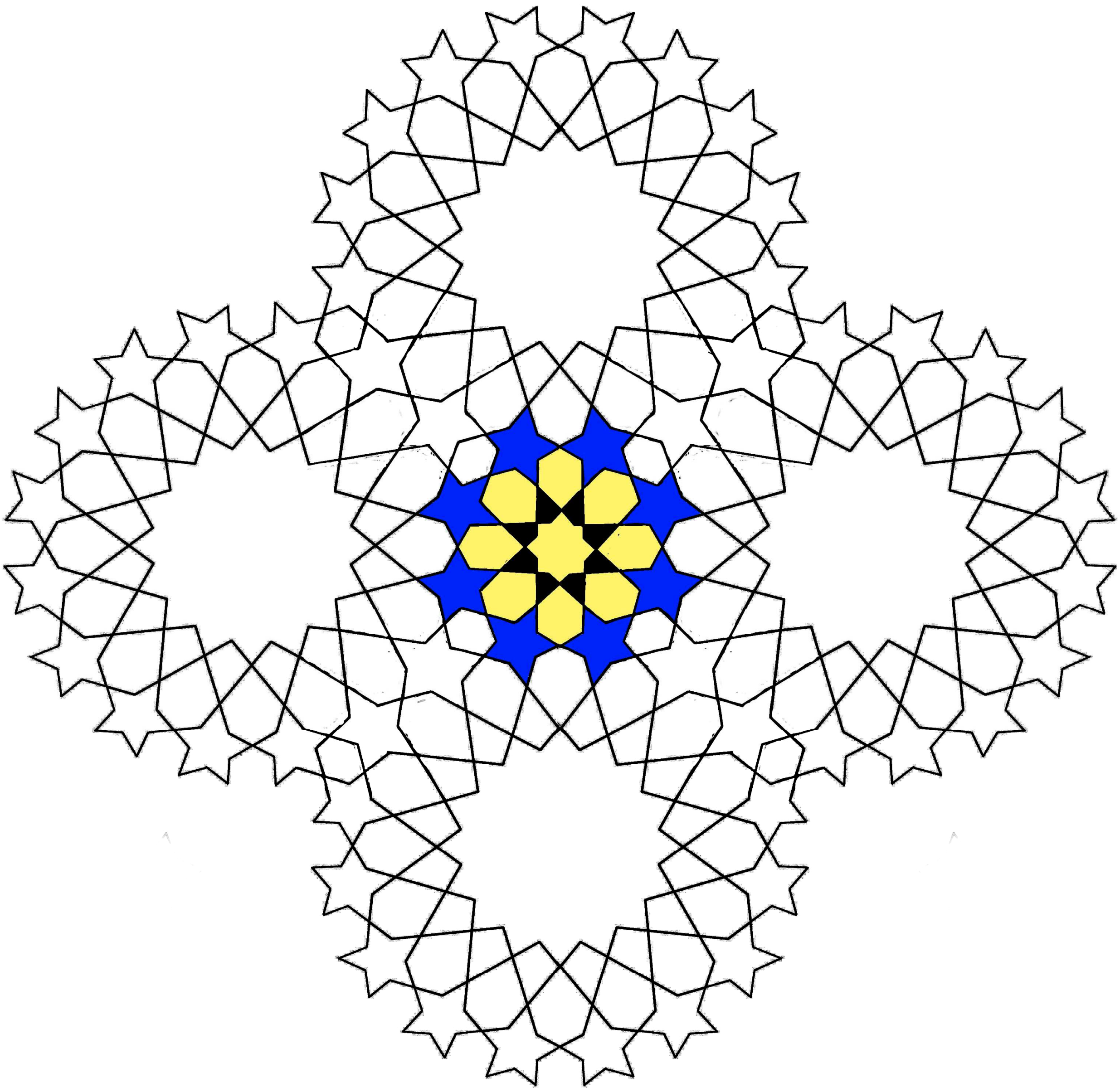


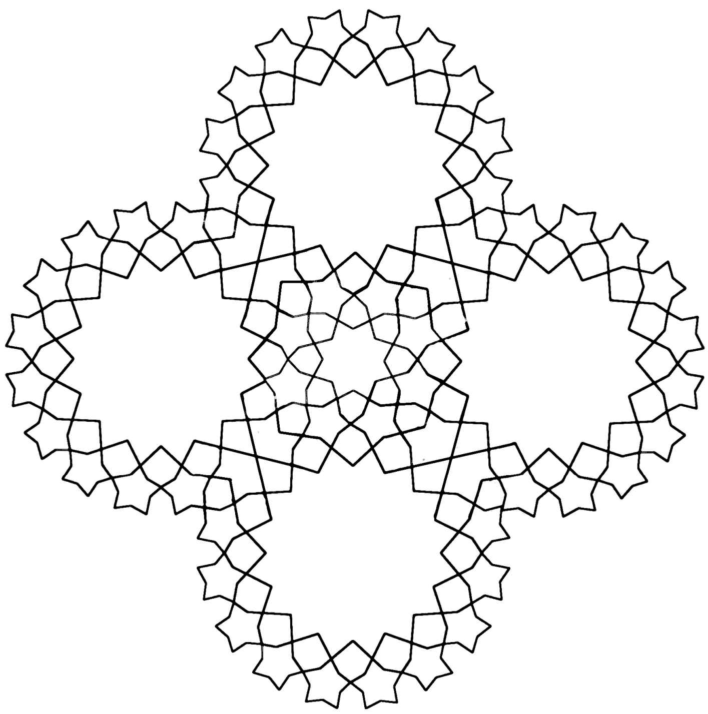


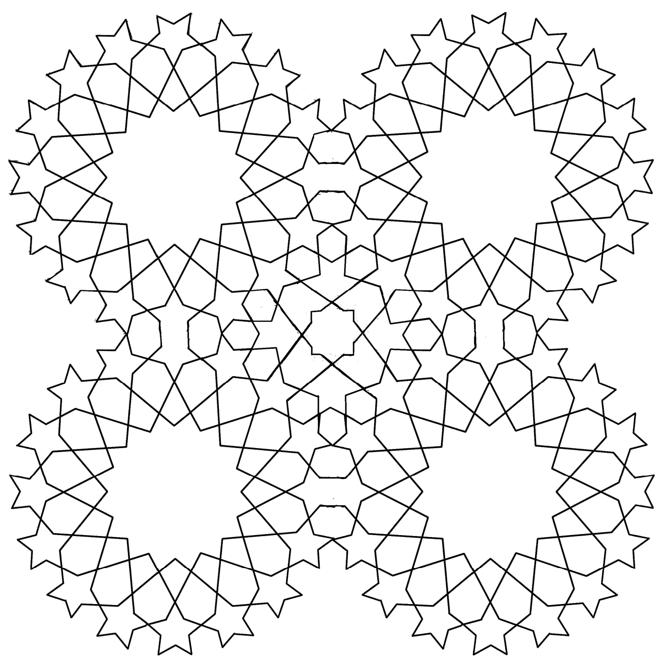




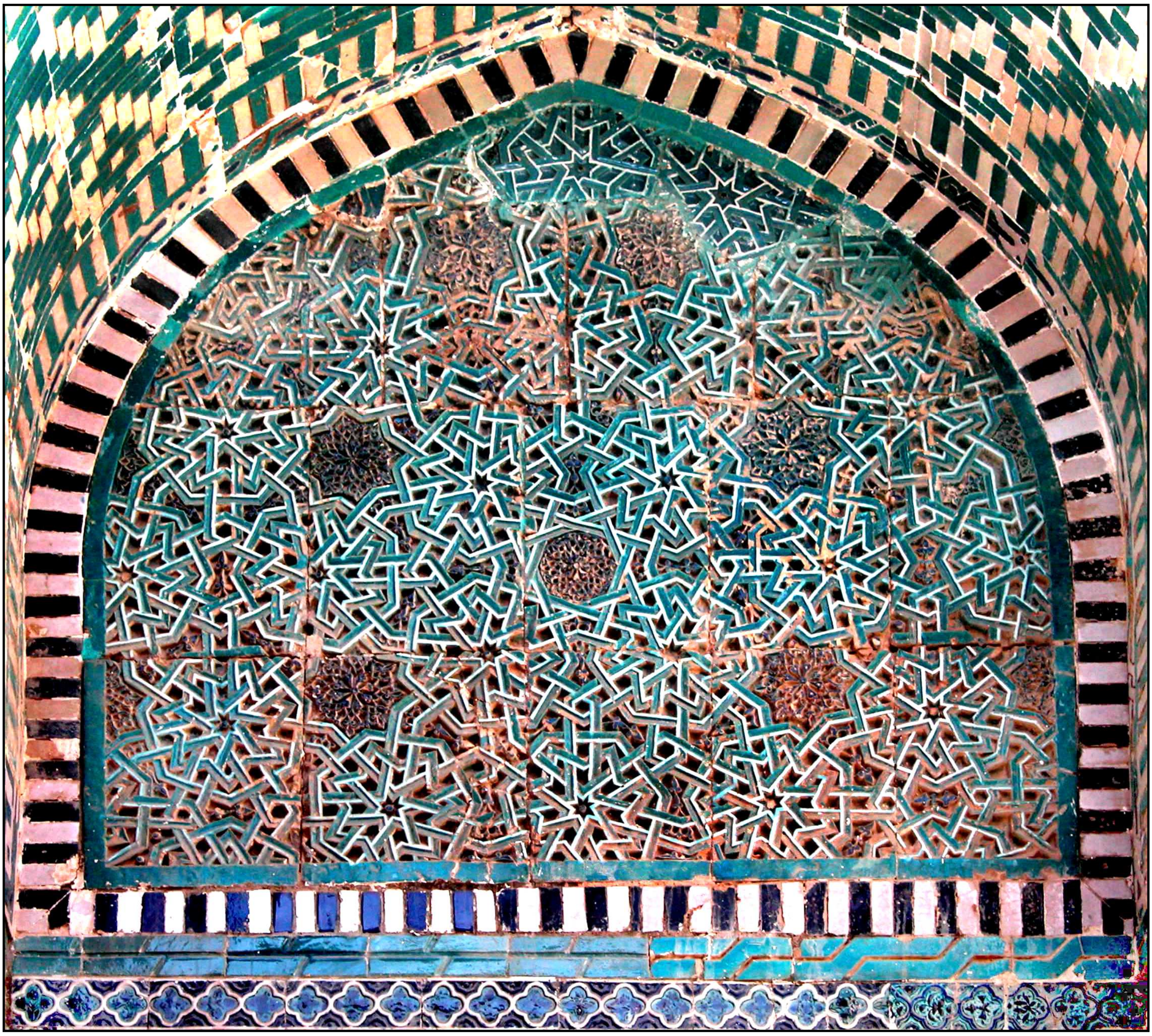
Tympan du pistach de la médersa Oulough Begh au Registan.



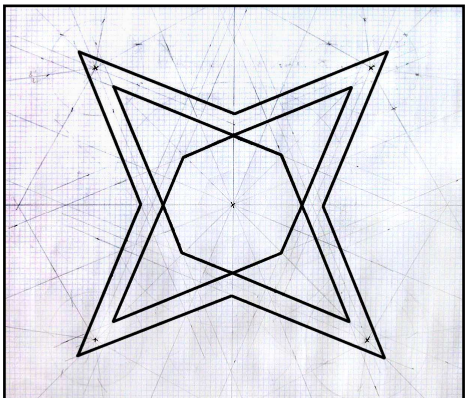


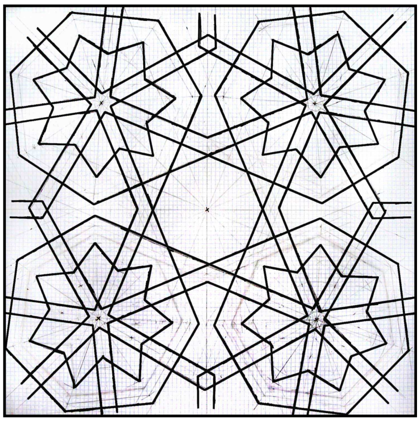


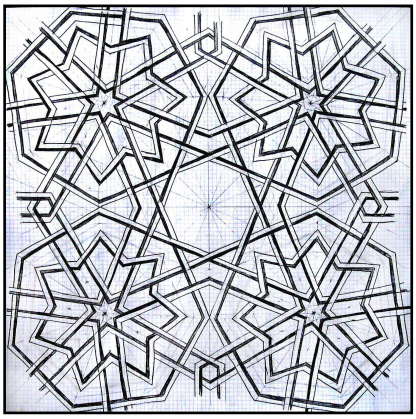
Etoiles à sept :

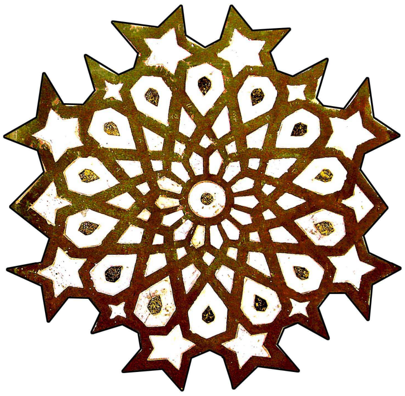
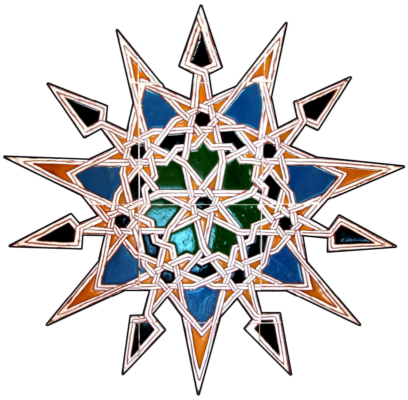
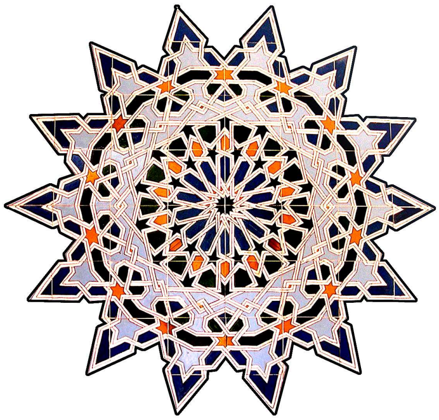
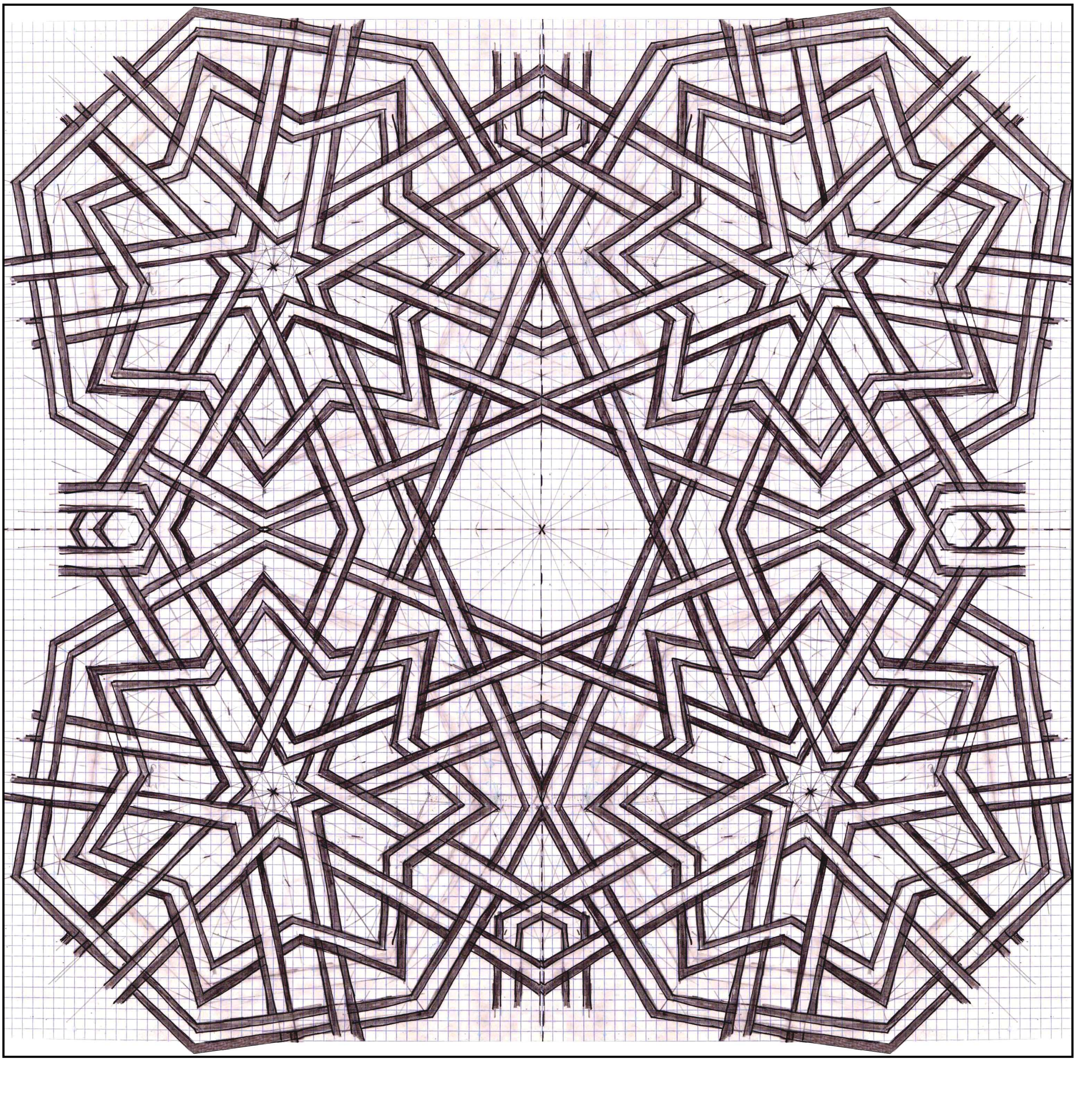


Alfiz décoré par Fakhr Ali en 1350 au mausolée de Khodja Akhmad à Shah-I-Zinda., c'est une des plus anciennes et des plus belles majoliques ciselées.



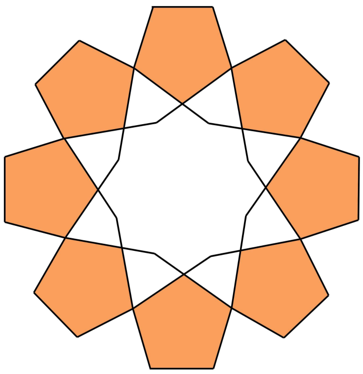
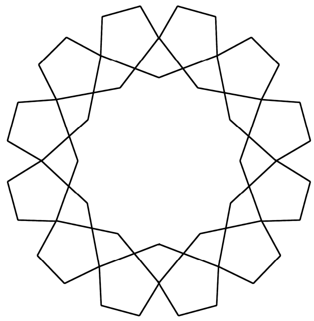
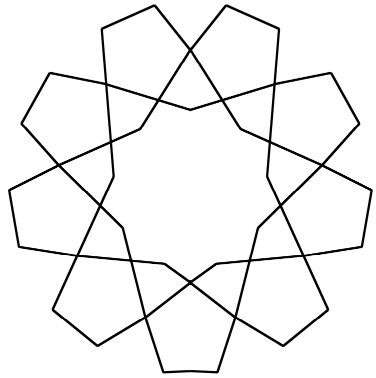
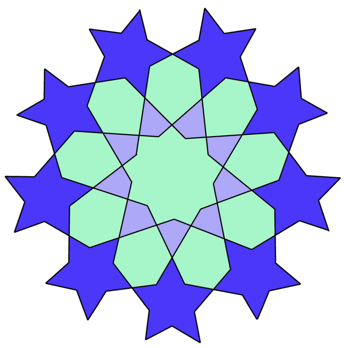
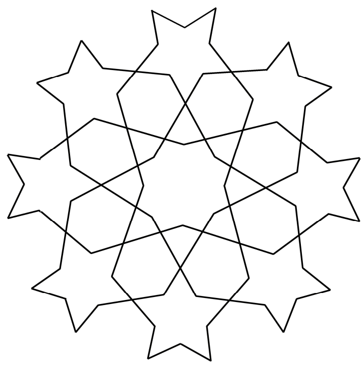
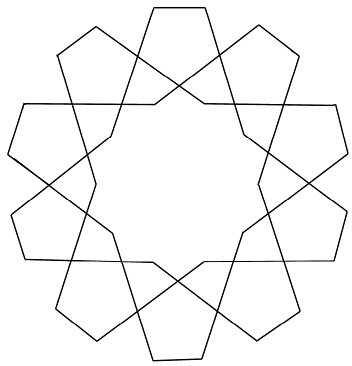
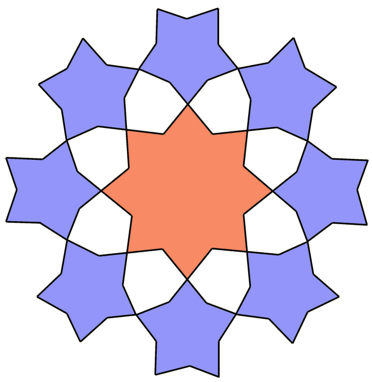
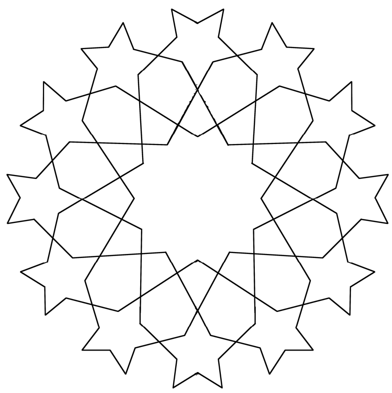
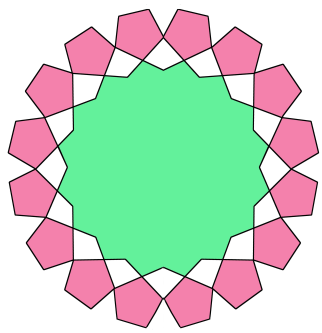
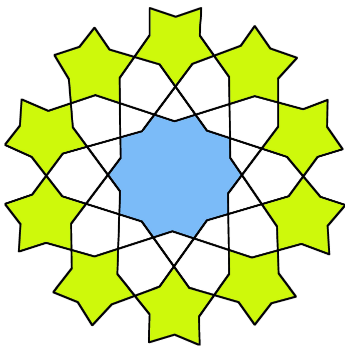
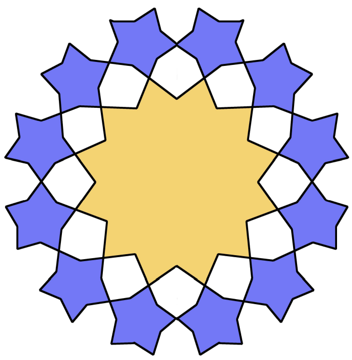
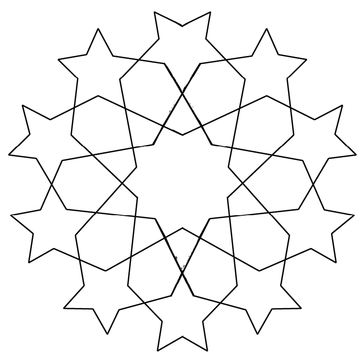




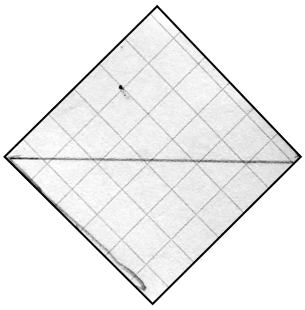
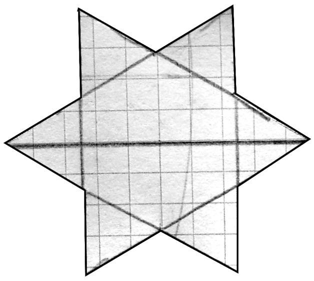
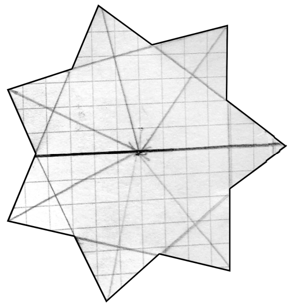
Banque de sur-modules :

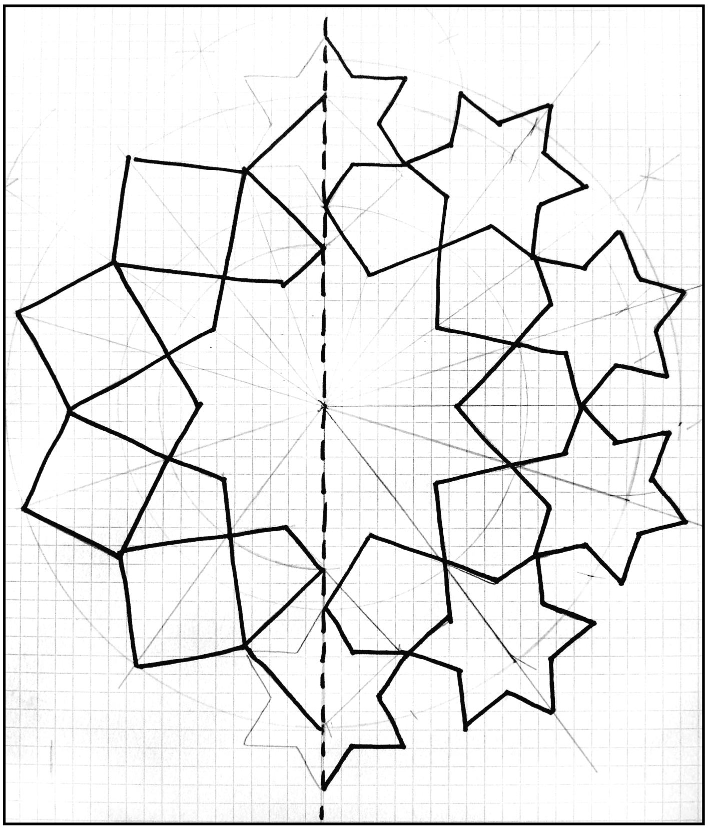
Sur-modules construits avec différents types de **pentagones** et pouvant se composer de différentes manières pour former des pavages.

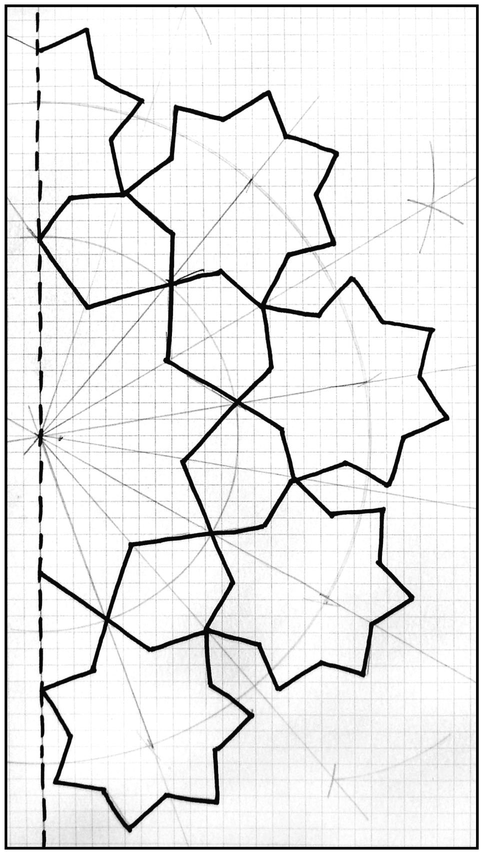
Autre type de sur-modules

D’autres types de polygones peuvent être utilisés pour construire un sur-module : carré, hexagone, heptagone…

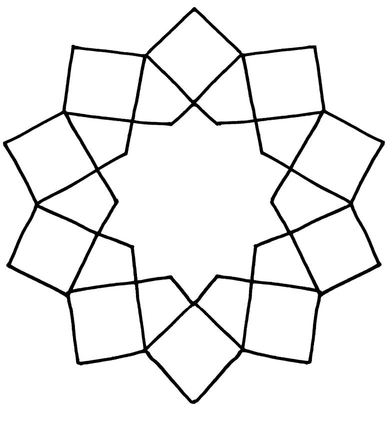
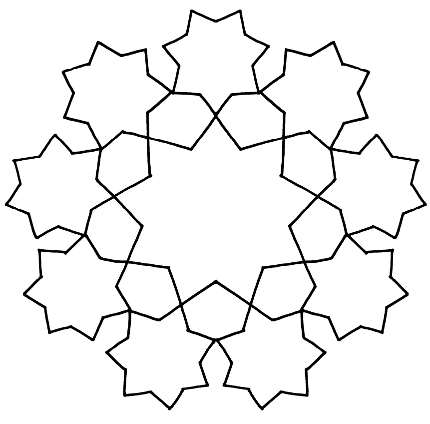
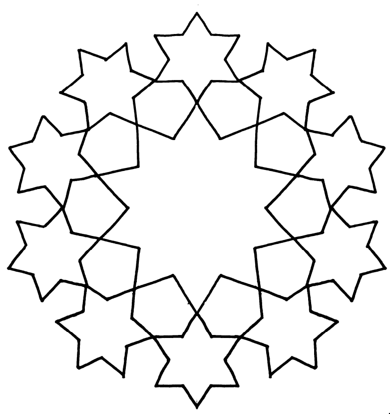






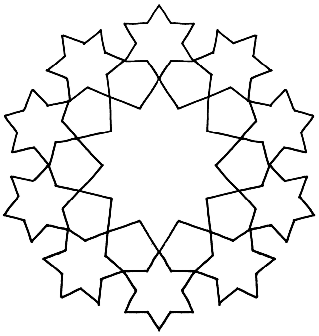
Sur-modules crées par dix **carrés** et dix **hexagones**

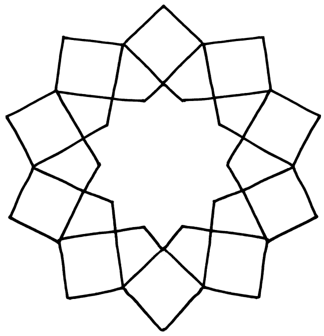


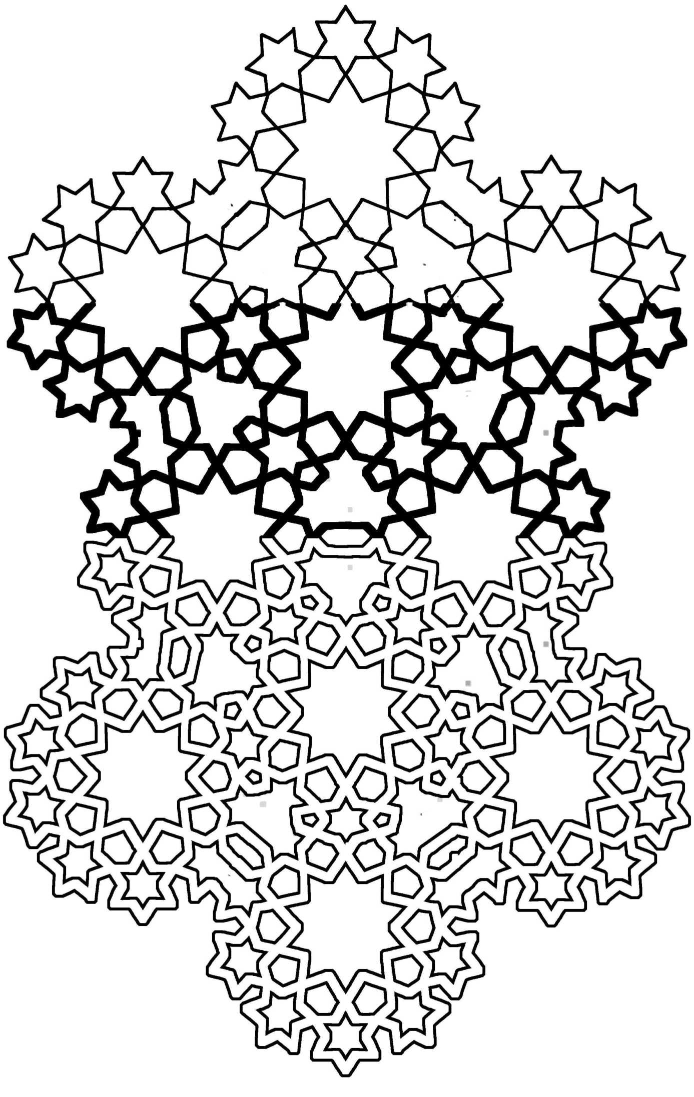
Sur-module créé par neuf **heptagones**.

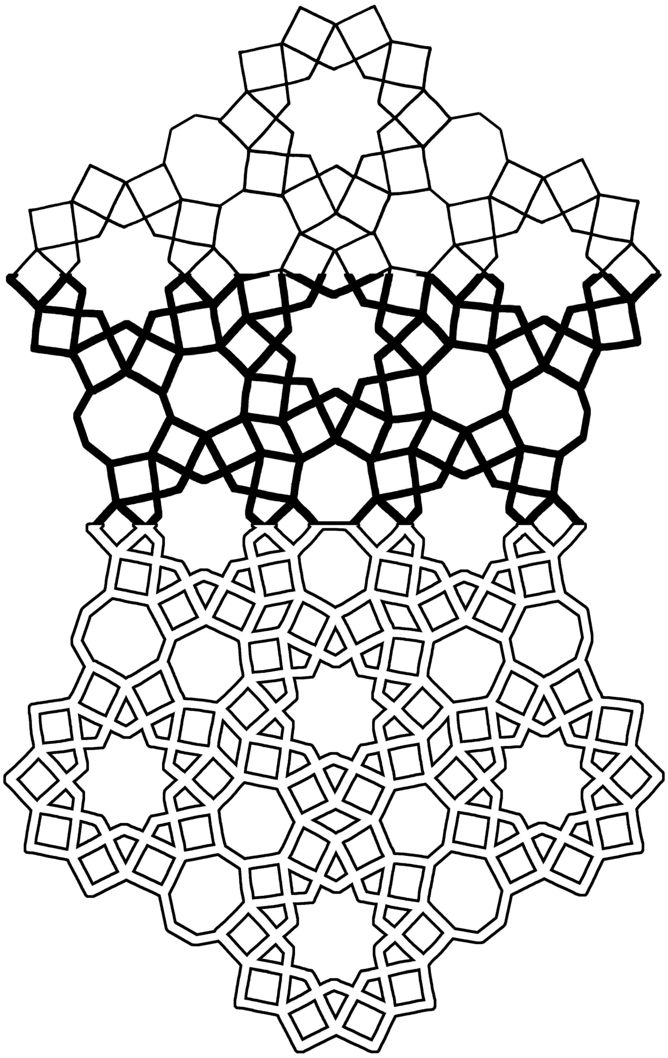




Composition de sur-modules :





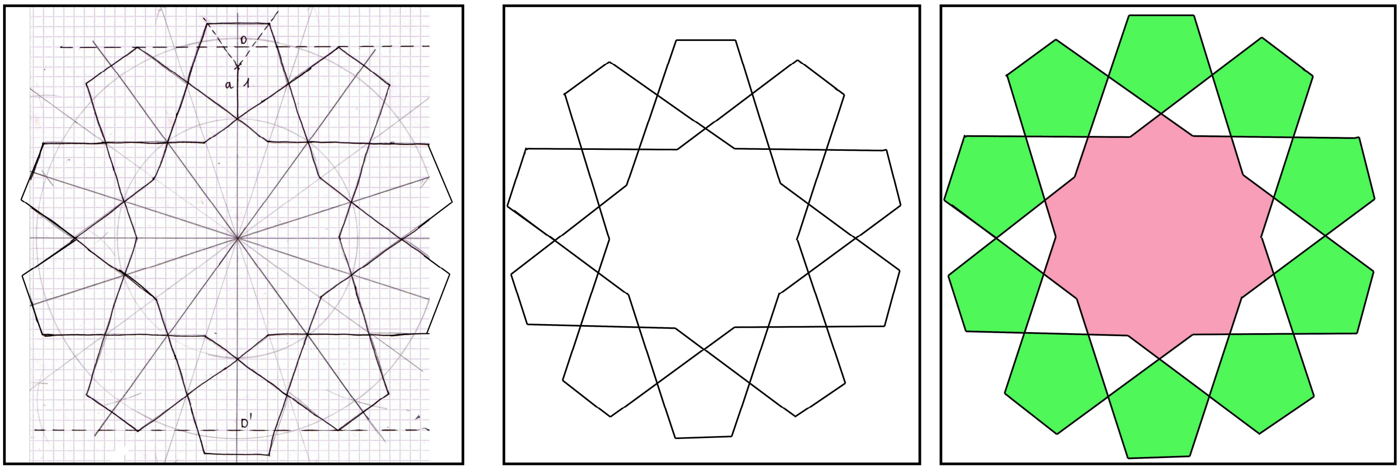




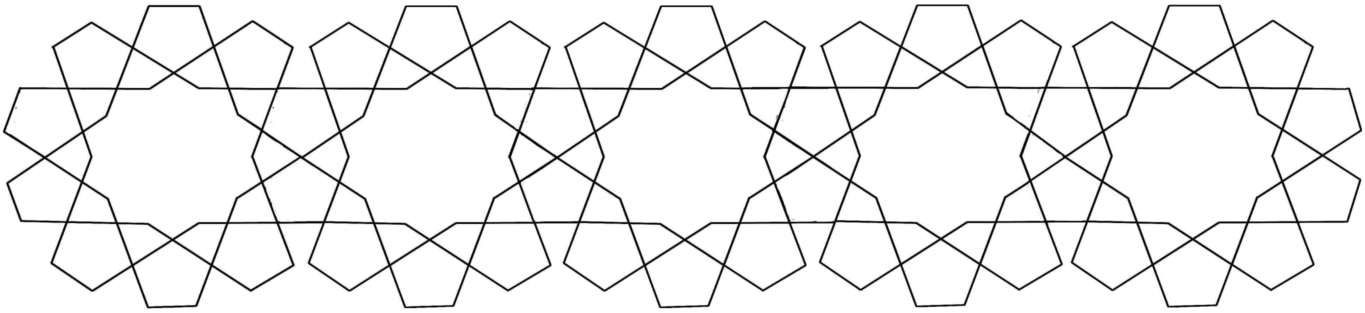
Composition des sur-modules précédents.

Méthodes de construction :

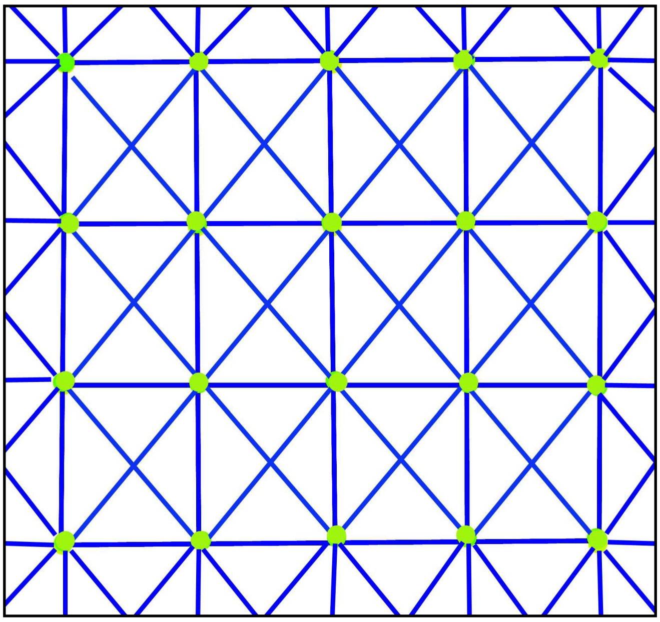
- **La première méthode** consiste à construire le **sur-module** qui sera transformé en **frise**, puis en panneaux selon un **canevas**.



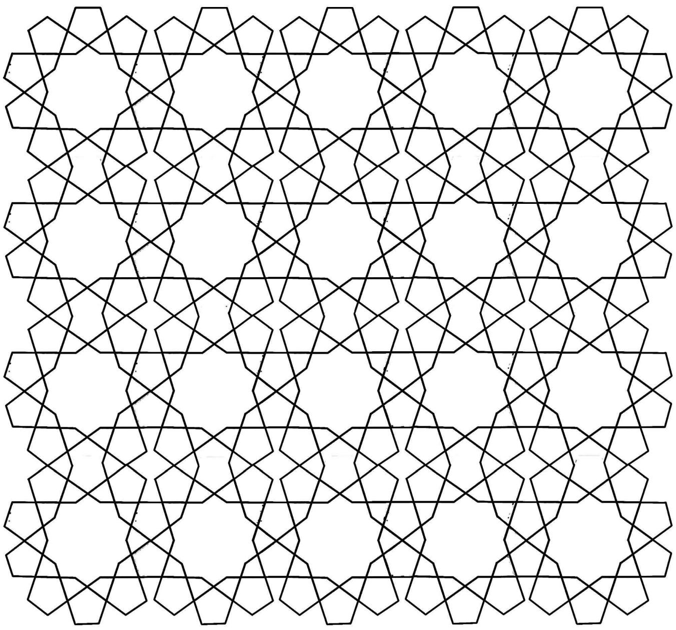
Construction du **sur-module.**



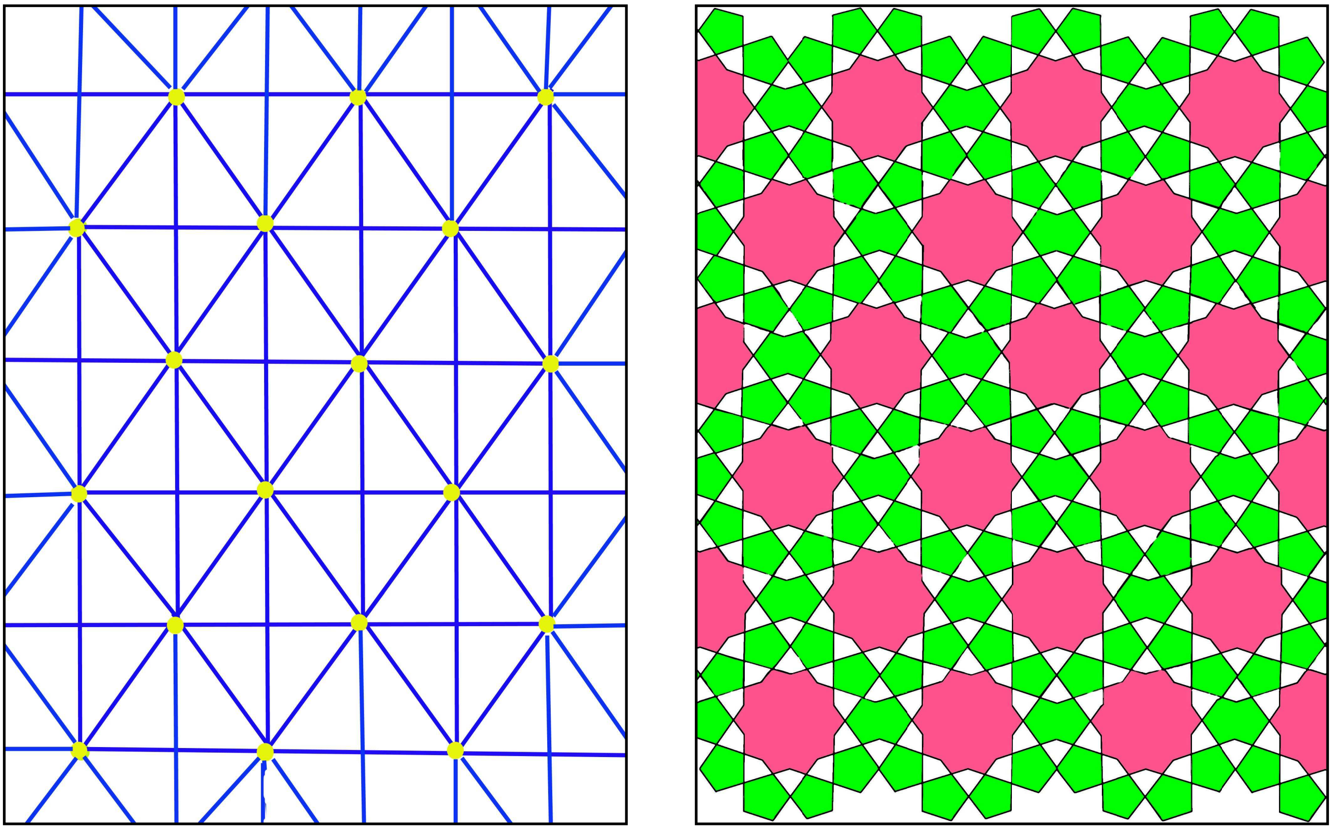
Frise.



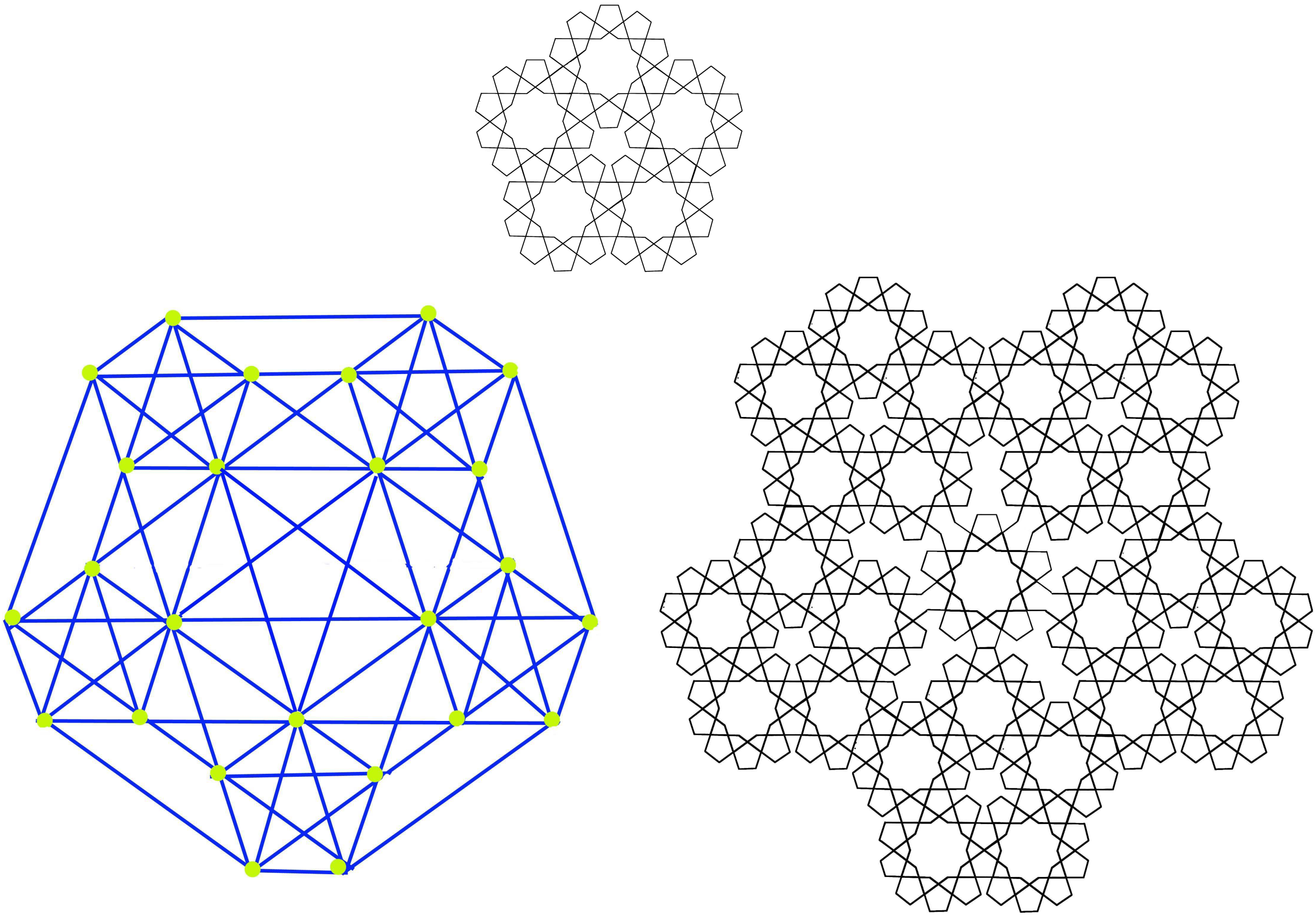
Canevas.



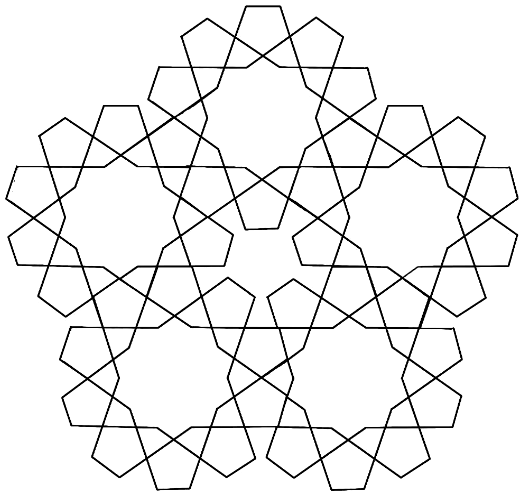
Panneau correspondant au canevas.



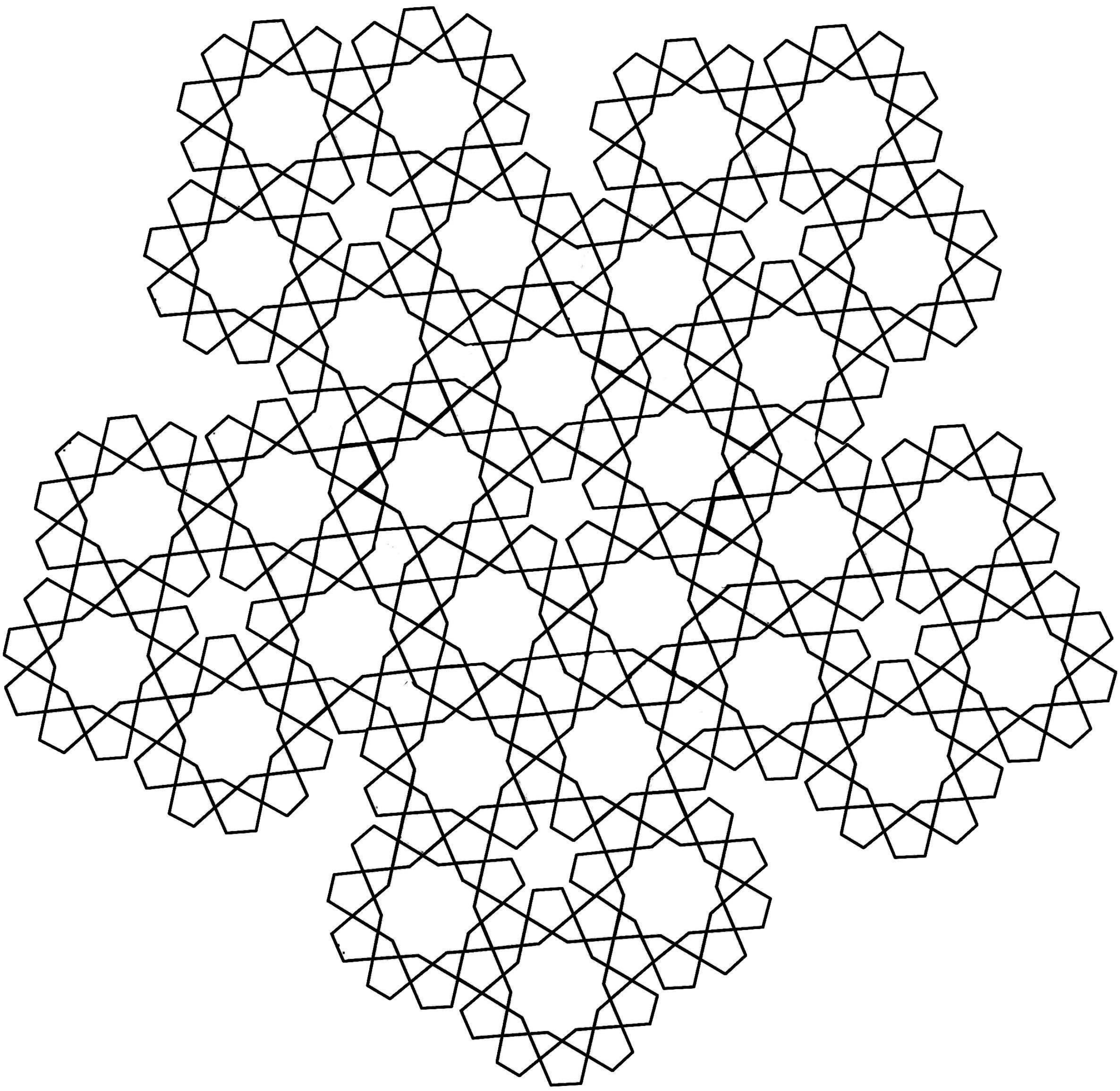
Autre canevas, autre décor.



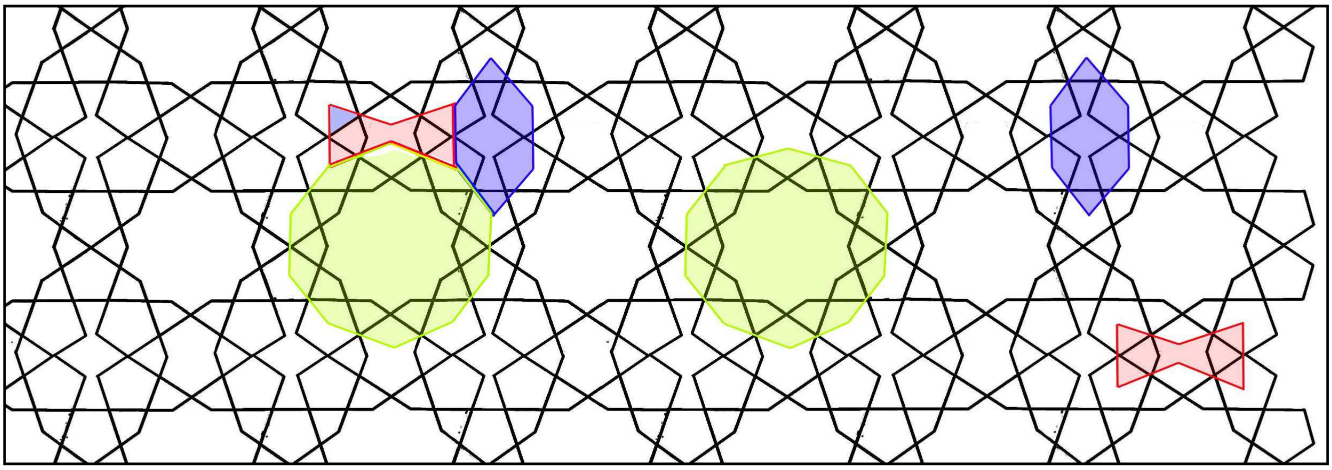
Autre module, autre canevas, autre décor.



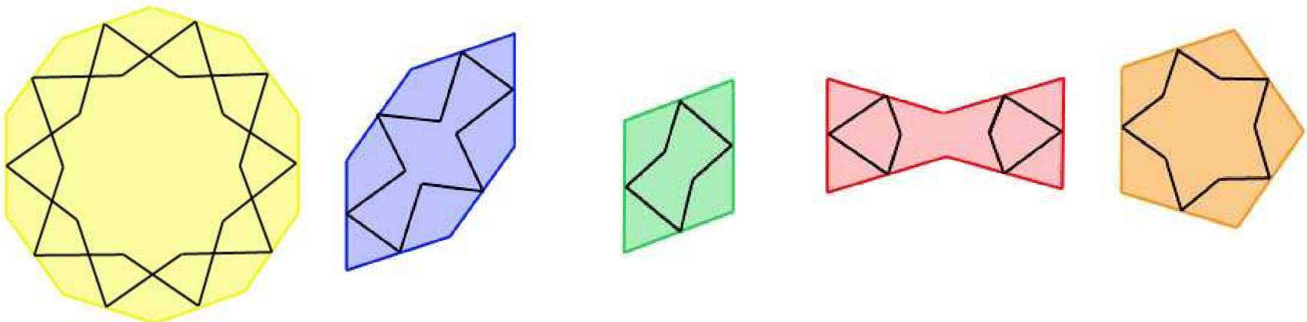
Agencement différent du sur-module précédent : un sur-module central et cinq satellites.



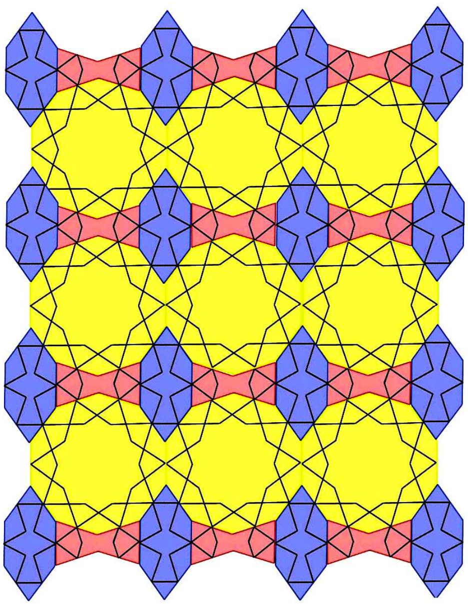
- **Troisième méthode** : dans les **pavages non périodiques**, de type **Penrose**, aucun rectangle minimal ne peut être dégagé. En revanche, la mise en évidence d'un pavage de polygones permet de tracer l'ensemble.

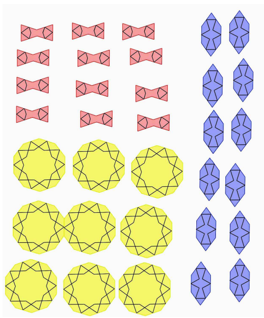


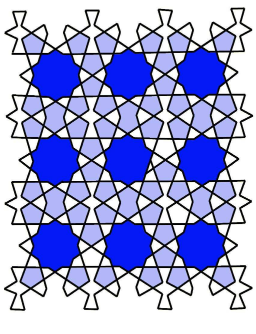
Mise en évidence du **pavage périodique** du plan par trois polygones. Le fait de choisir le pentagone comme base facilite la compréhension de l'ensemble car nous bénéficions de tous les avantages des nombres d'or. Leurs propriétés algébriques extraordinaires se retrouvent en effet dans toutes les constructions géométriques utilisées :

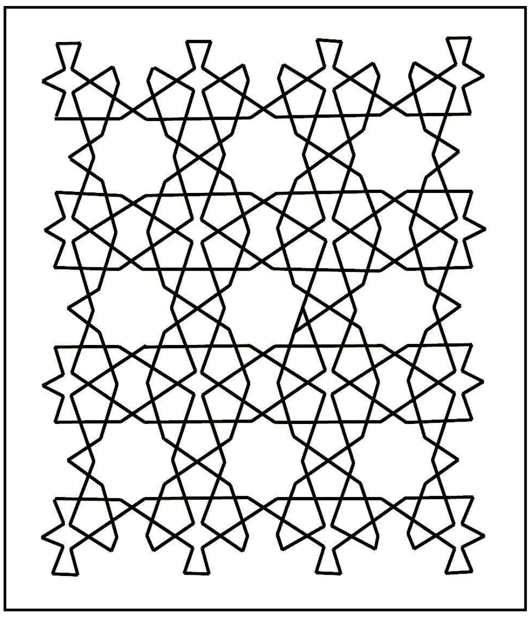


Tous ces polygones qui peuvent servir pour un **pavage périodique** ou **non périodique** du plan ont des **côtés égaux** ; les différents segments joignant les milieux des côtés seront dans la continuité les uns des autres lorsqu'ils seront accolés. Ce sont ces segments qui formeront le squelette du décor.

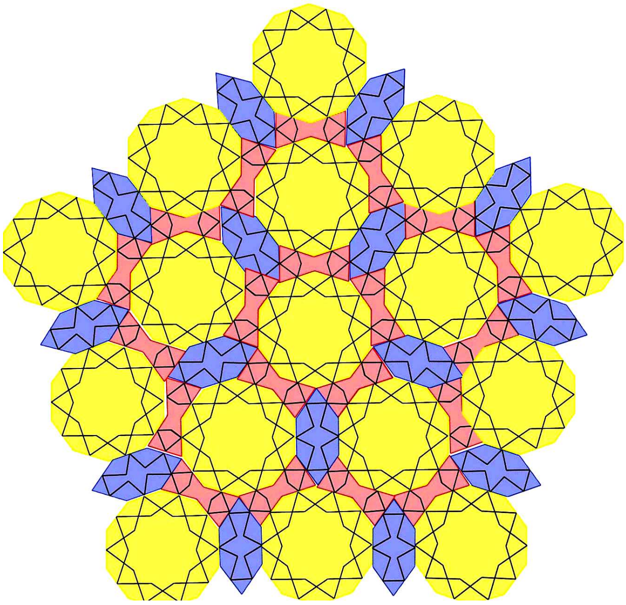


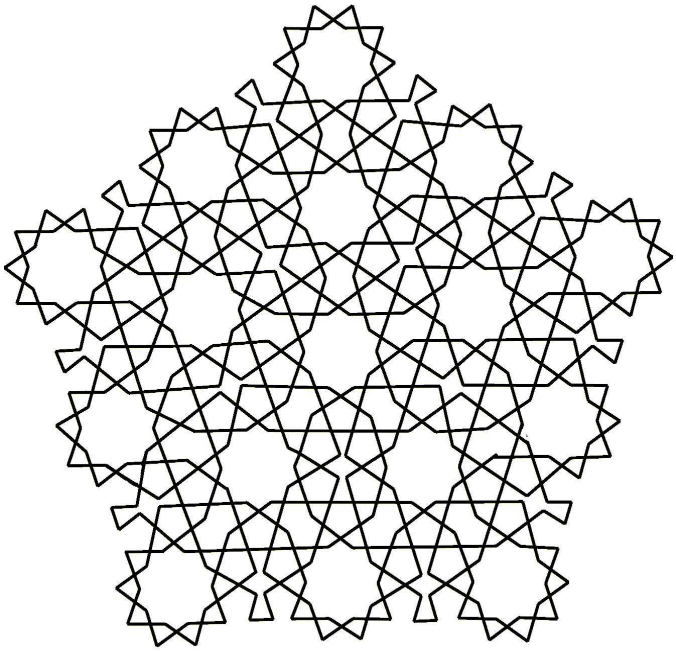


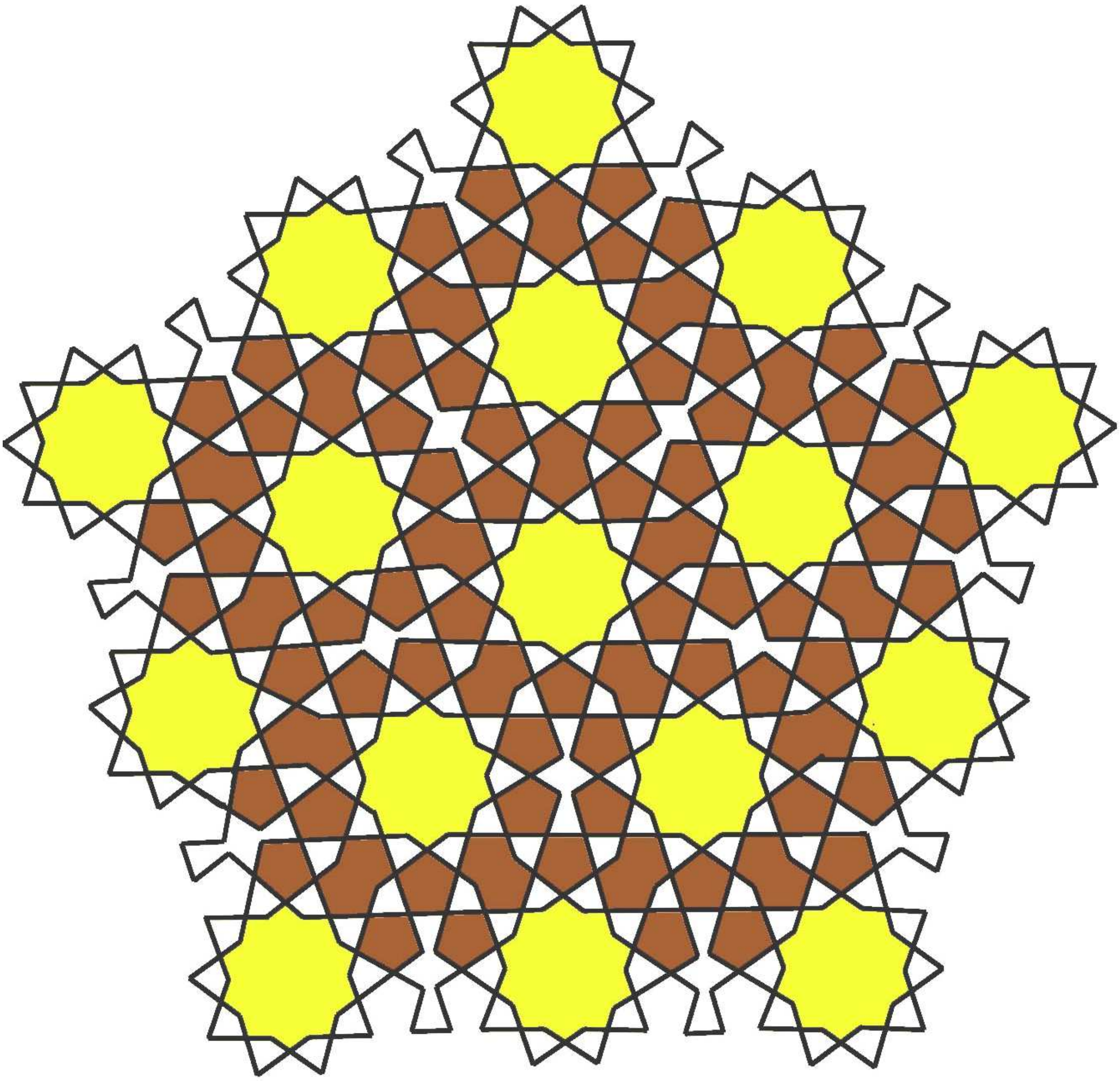




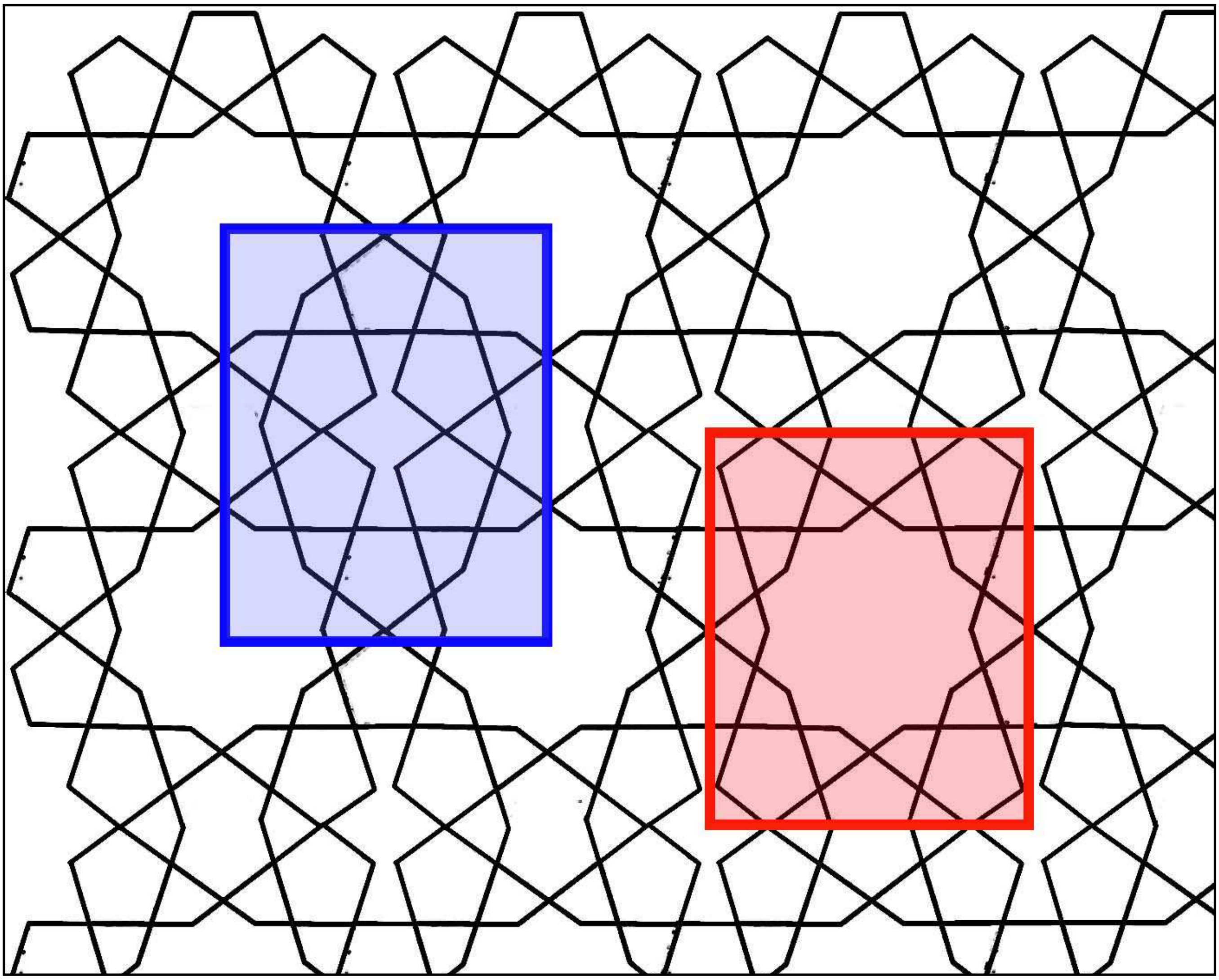
Construction du module d'un pavage **non périodique** du plan :

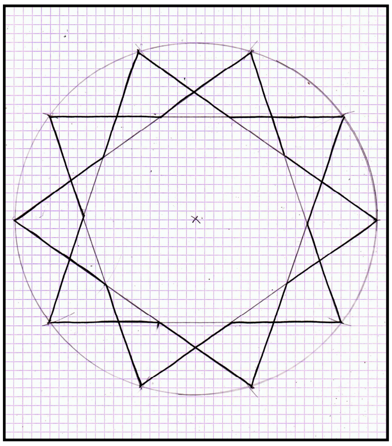


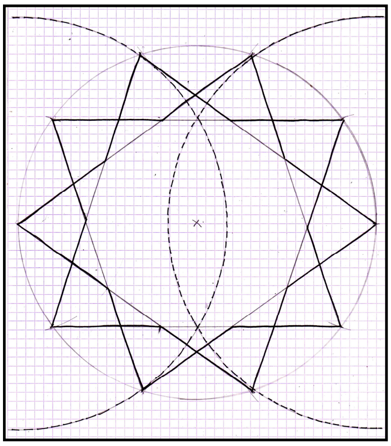


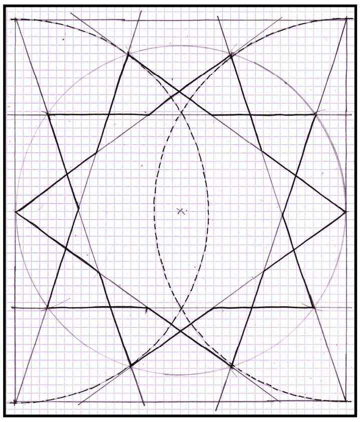


- **La deuxième méthode** consiste à chercher parmi les **rectangles minimaux** celui du pavage périodique dont le tracé est le plus apte à être dessiné : le rouge a été choisi.









La construction des deux demi-cercles permet le tracé du **rectangle minimal**.
Celui des droites AB et CD déterminera la position des sommets des pentagones satellites.

Les nombres d'or :

- *Définition des nombres d'or :*

Si on ajoute ou retranche 1 au nombre d'or, on trouve son inverse

$$x \pm 1 = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad x^2 \pm x - 1 = 0$$

ce qui donne deux racines $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\varphi = 0{,}61803398$ et $\Phi = 1{,}61803398$

Ces deux nombres ont des propriétés extraordinaires

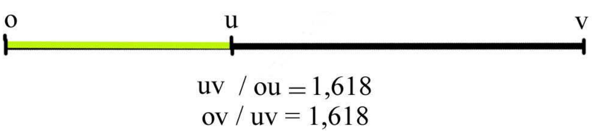
$$\varphi \times \Phi = 1 \qquad \frac{\Phi}{\varphi} = \Phi^2 \qquad \Phi^2 = 1 + \Phi$$

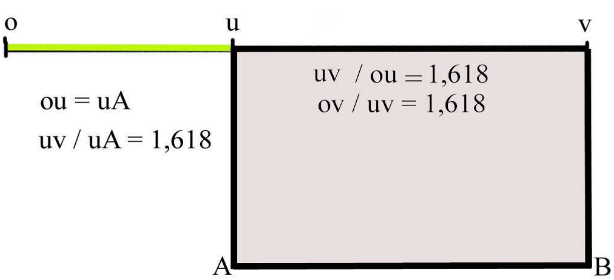
$$\Phi - \varphi = 1 \qquad \Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = 1 + 2\Phi$$

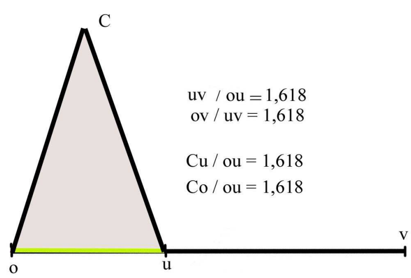
$$\Phi + \varphi = \sqrt{5} \qquad \sqrt[n]{\Phi} = \frac{n-(n-1)}{n} \cdot \varphi \qquad \Phi^n = 1 + (n-1)\Phi$$

- Ces nombres d'or sont liés au décagone car nous pouvons démontrer que dans un décagone de cercle circonscrit 1, le côté est égal à φ.
- L'angle au centre du décagone est de 36°, nous pouvons démontrer que

$$\sin 36° = \frac{+1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\Phi}{2}$$

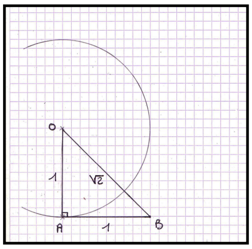


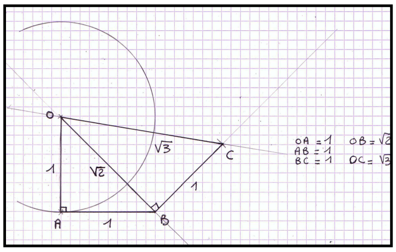


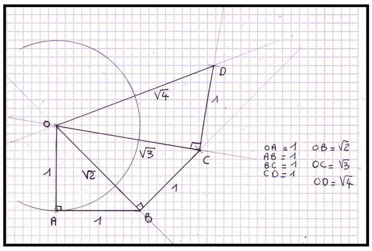


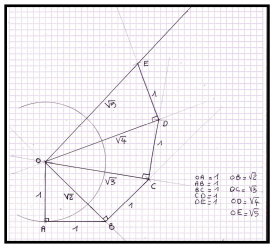
- *Partage d'un segment en extrême et moyenne raison selon Euclide.*
- *Triangle sublime.*
- *Rectangle d'or.*

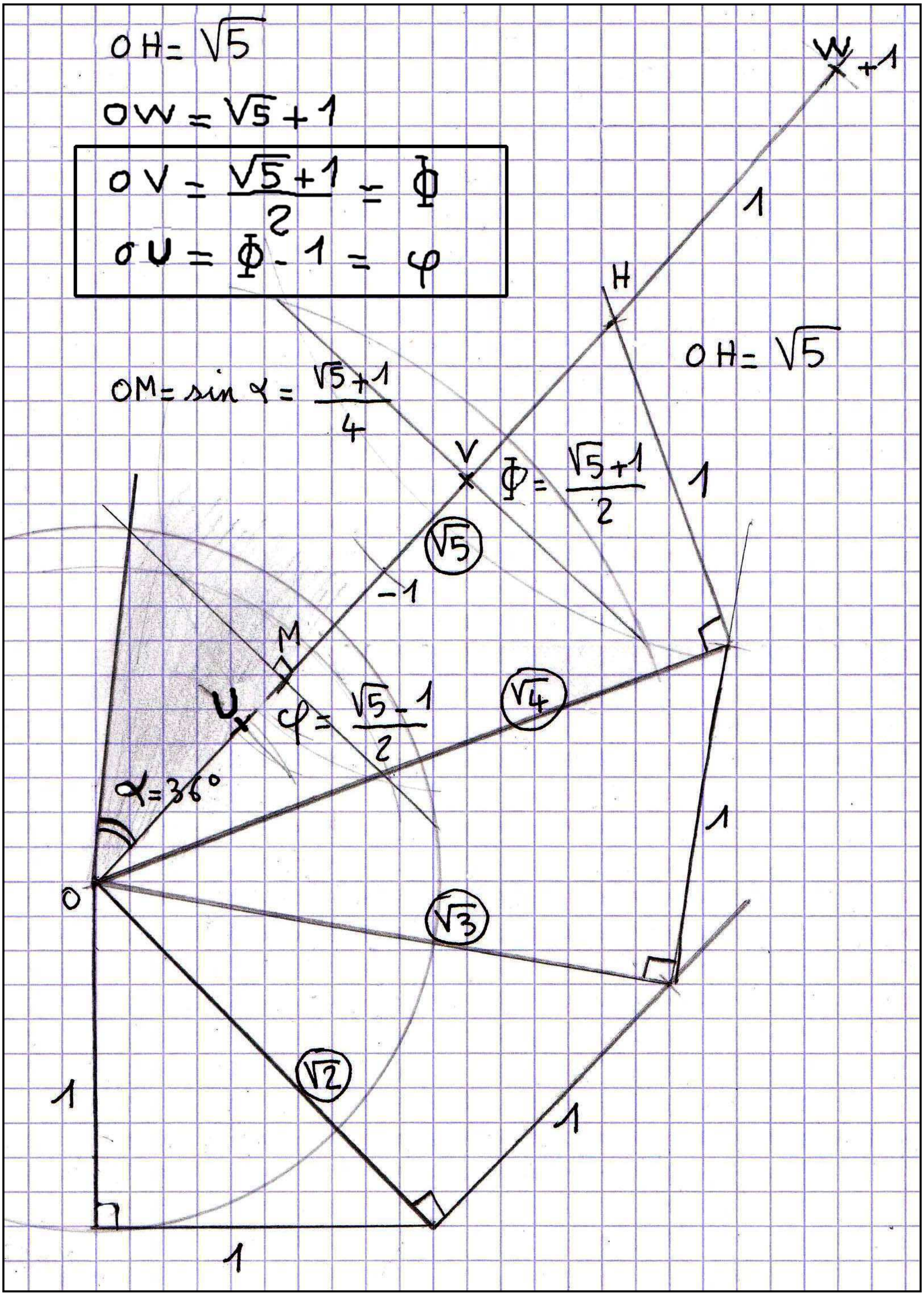
- *Construction des nombres d’or :*



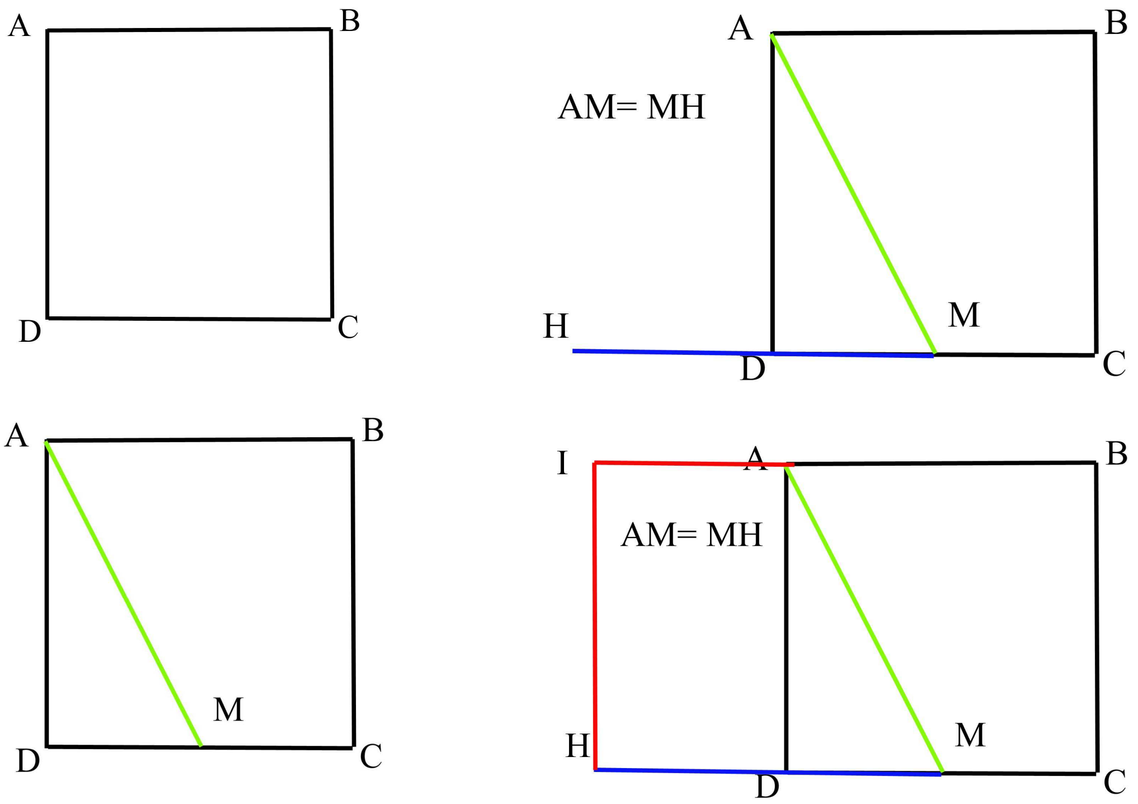








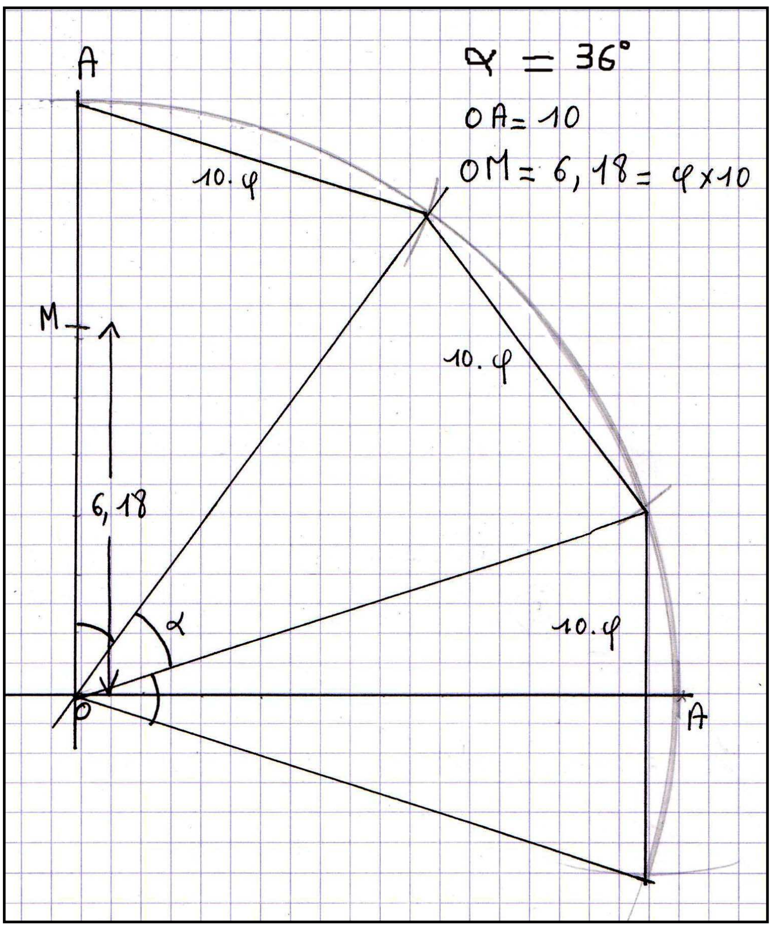
- *Construction du rectangle d’or selon Euclide (300 ans avant J.C)*



M milieu de **DC**

IBCH est un rectangle d’or.

- *Construction simplifiée du décagone :*

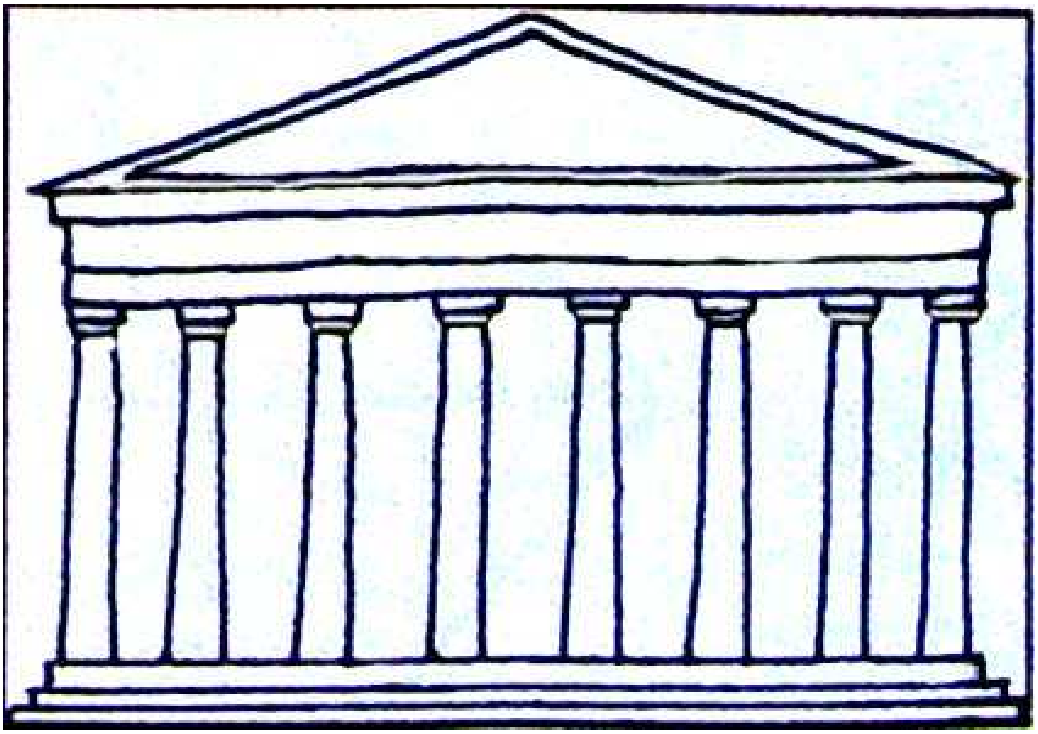


Le côté du décagone dont le rayon du cercle circonscrit est égale à l’unité **1**, est égal au petit nombre d’or.

Donc :

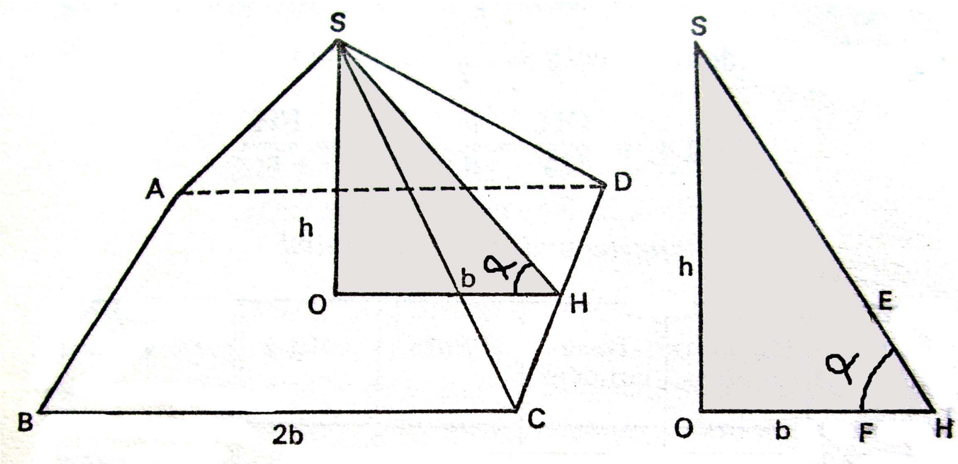
Il suffit de construire un cercle dont le rayon est égal à l’unité (ou à dix unités) le côté du décagone sera alors égal à la mesure de la corde de la longueur du nombre d’or, soit **0,618** unité (ou 6,18 pour un rayon égal à dix fois l’unité).

Dans son traité de géométrie plane « les Eléments », Euclide (300 A.J.C) généralise l'usage de la règle et du compas en formulant des méthodes de construction pour les figures géométriques simples ; il décrit ainsi la construction du nombre d'or déjà connue par Pythagore et Platon. Il définit ce nombre comme le résultat du partage d'un segment en moyenne et extrême raison (« Eléments II, chapitre II).



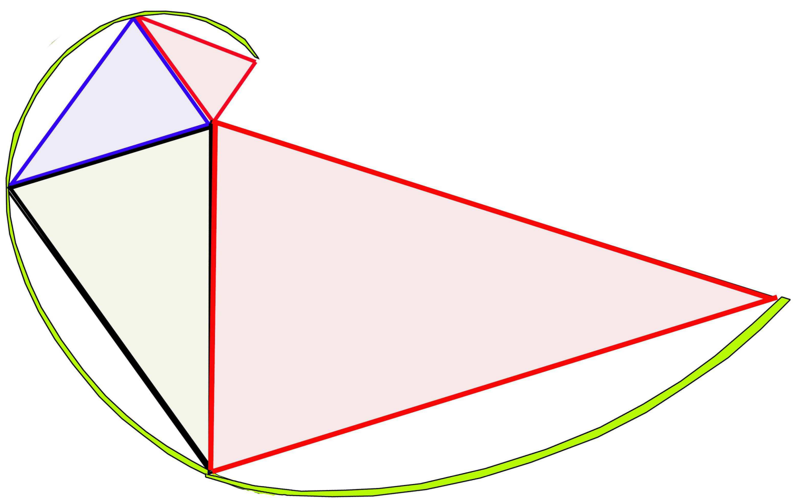
Ces nombres se retrouvent partout dans la nature et dans de nombreuses réalisations humaines :

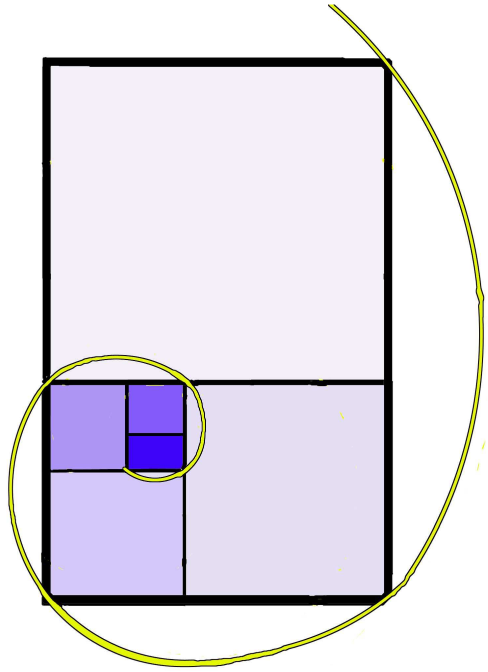
- dans les proportions du Parthénon à Athènes, construit par l'architecte Phidias, d'où la notation symbolique de ces nombres sous le nom de la lettre grecque « **phi** », initiale de Phidias.
- L'angle de l'équilibre instable d'un amoncellement (tas de sable, pyramide…) est de 51° 49' 38'' le cosinus de cet angle est égal au nombre d'or. Ce qui est une des théories expliquant l'angle de la pyramide de Khéops égale à 51° 50'



α =	51°50'
Sinus	0,786 216 5
Cosinus	0,617 951 1
Tangente ..	1,272 295 7
Cotangente .	0,785 890 8

- La projection dans le plan de la répartition des feuilles sur une tige correspond à la spirale tracée à partir d'un triangle sublime (triangle isocèle dont la base est égale au petit nombre d'or et dont les côtés sont égaux au grand nombre d'or).
- La spirale de l'ammonite correspond à celle tracée à partir du rectangle d'or.





- Les dimensions des sections de la coupe de la coquille d'un escargot marin représentent la progression géométrique et algébrique dite **suite de Fibonaci**, suite intimement liée au nombre d'or (départ avec 1, deuxième terme égal au nombre d'or 1,618 …).