

La route des Arabesques

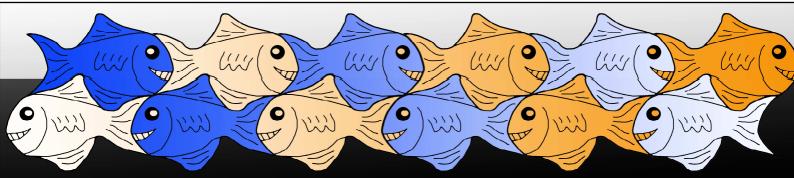
Arts de l'Islam.

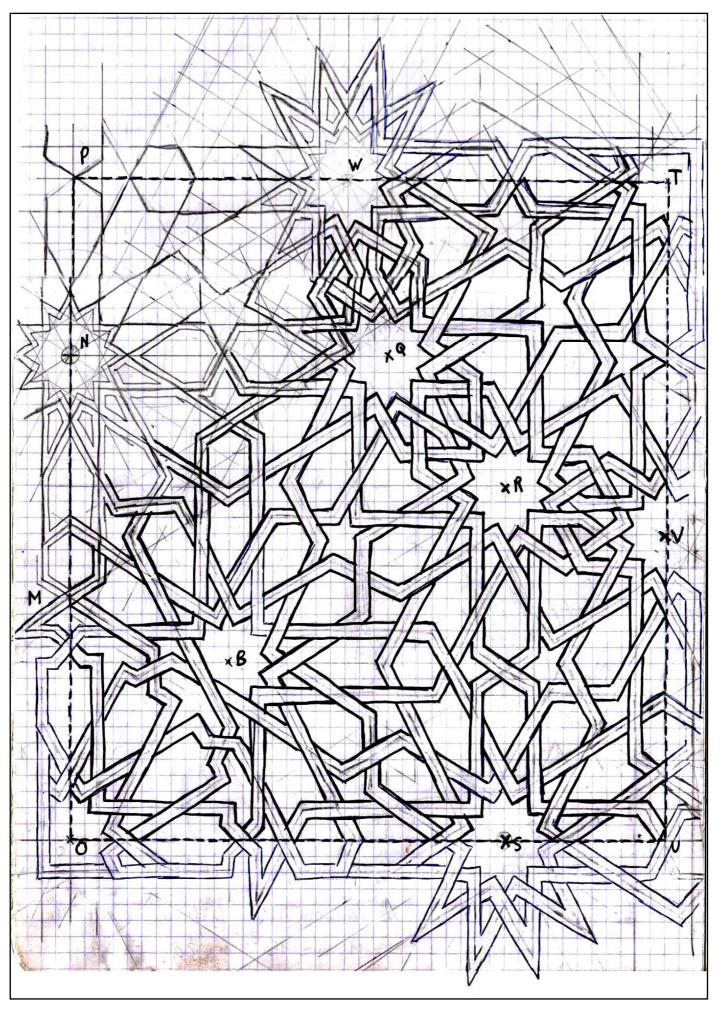
Les pavages du plan

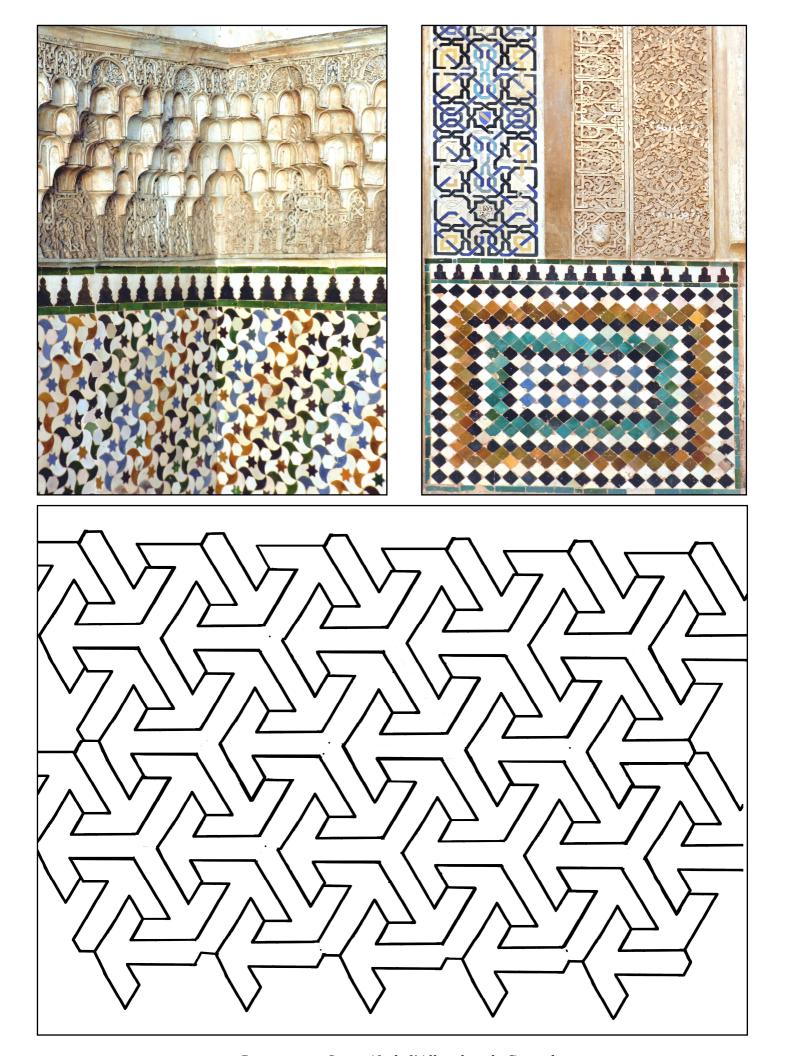
Cet ouvrage étudie les règles de construction qui régissent les pavages figuratifs et les pavages islamiques non figuratifs.

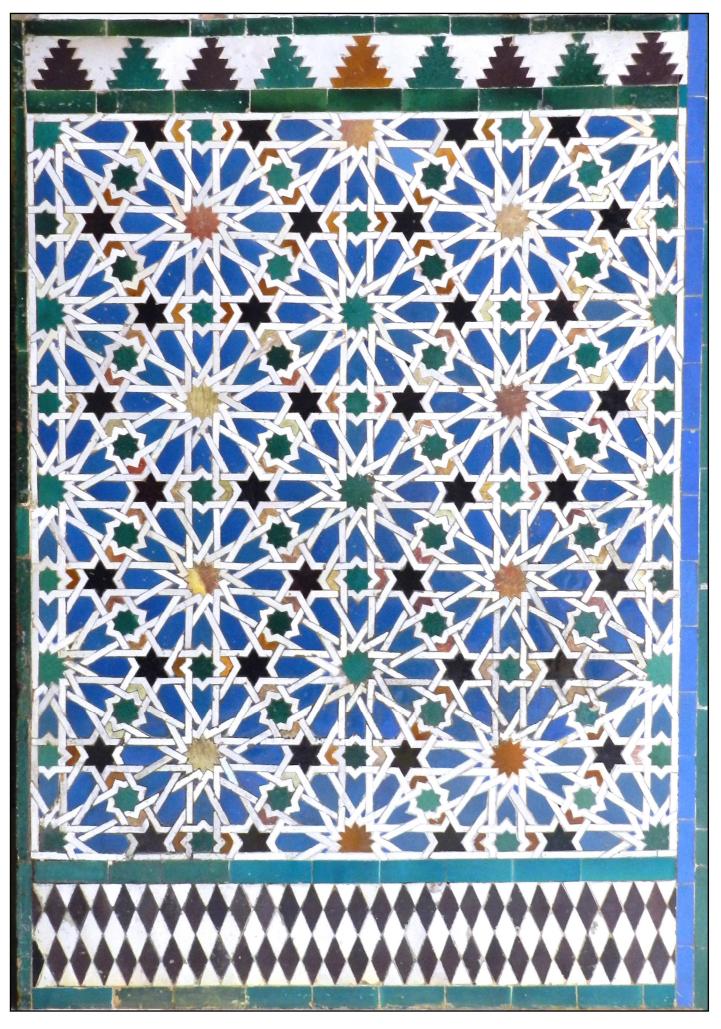


Par Louis Arnaud

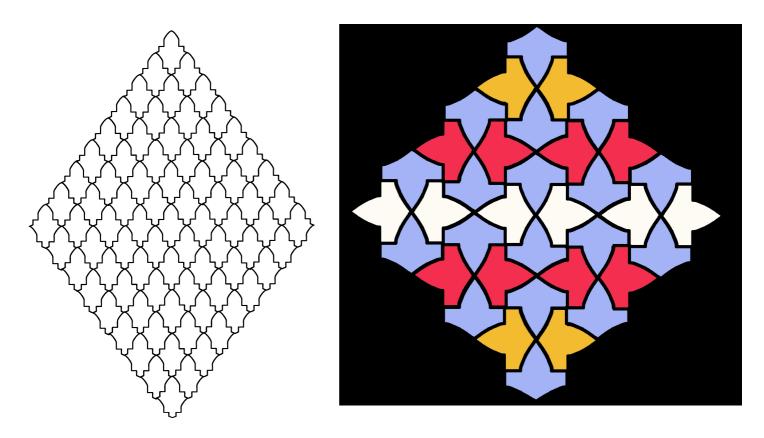




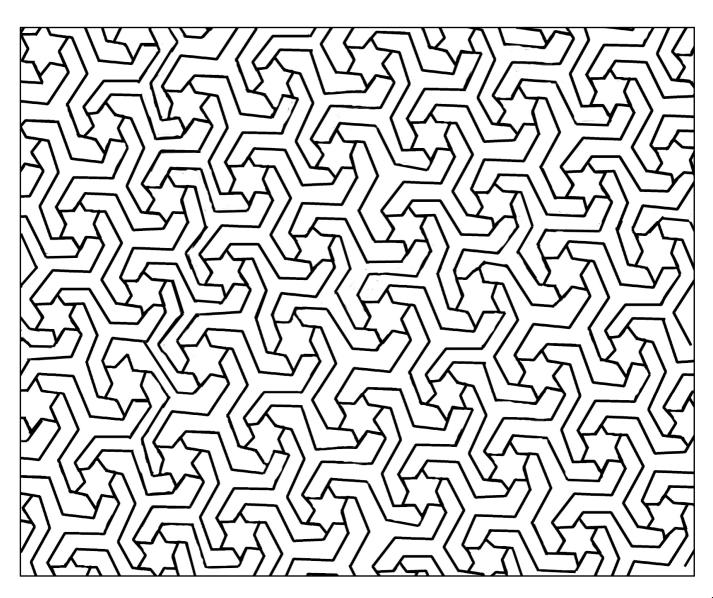


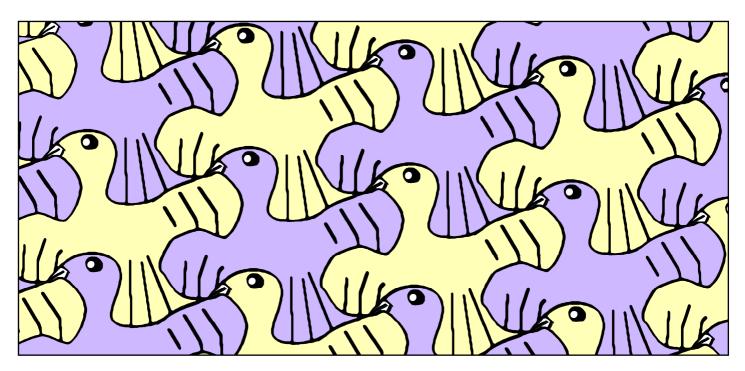


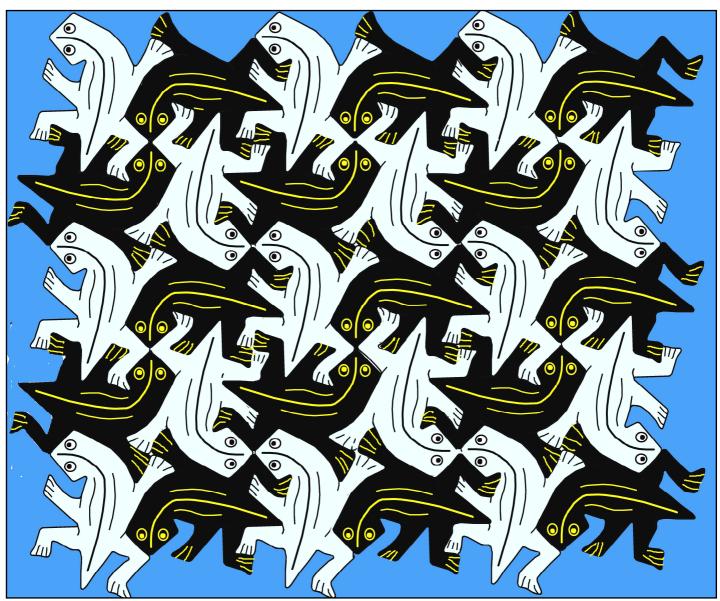
Composition d'étoiles à douze formant un pavage non figuratif à l'Alcazar de Séville.



Relevés de pavages géométriques de l'art islamique andalou.







Oiseaux, lézards et poissons (page suivante) : types de pavages figuratifs développés par le graveur hollandais Mauritz Cornelis Escher, maître du genre.

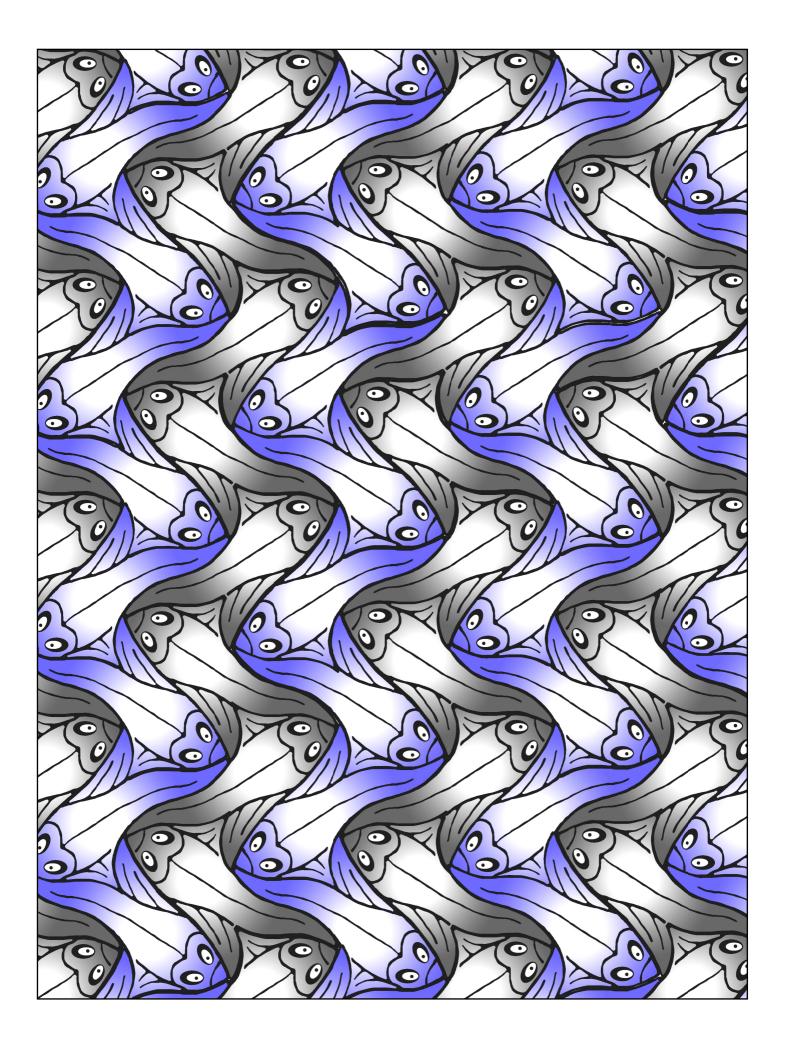
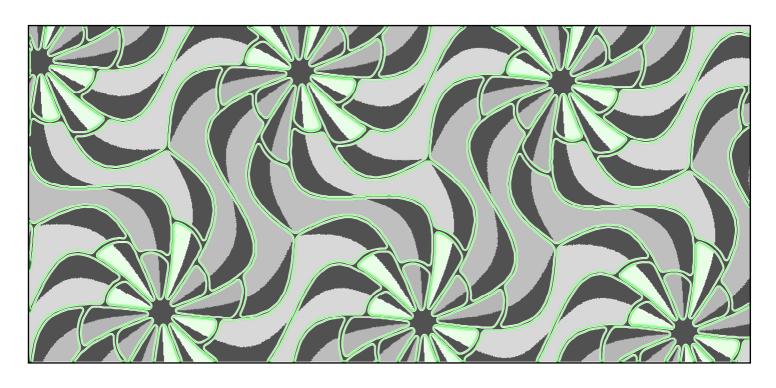




TABLE DES MATIÈRES

I. PAVAGE DU PLAN:	11
II. L'INFINI :	21
III. DEFORMATIONS POLAIRES:	29
IV. ASSOCIATION DE PAVES :	40
V. EXEMPLES:	43



Pour tout profane, la notion de pavage est étroitement liée à celle de carrelage. Il n'en est rien :

Le pavage est une notion mathématique consistant à occuper totalement le plan par des **pavés** (ou tuiles). Cette notion est étroitement liée à la cristallographie; en effet le pavage travaille dans une surface plane à deux dimensions alors que la cristallographie travaille dans un volume à trois dimensions; cependant les mêmes règles sont applicables dans les deux cas.

De nombreux mathématiciens se sont penchés sur ces problèmes apparemment simples et s'y sont cassés les dents : de nombreux théorèmes attendent encore leur démonstrations.

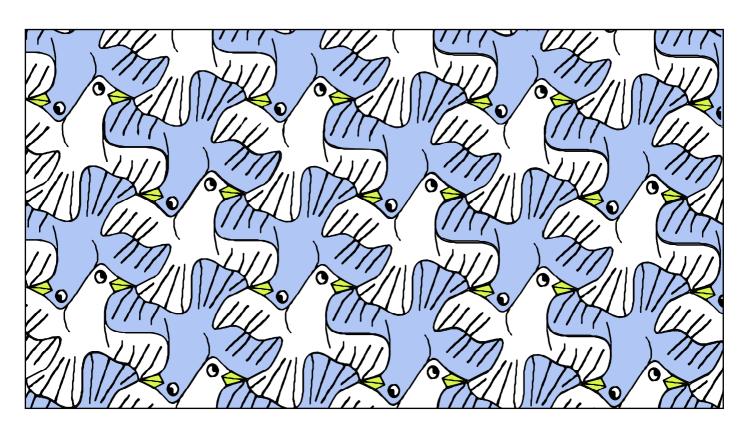
Nous laisserons donc loin de nous le côté mathématique pour nous intéresser qu'au côté manipulation et qu'à la valeur artistique.

Nous voulons du simple.

En premier lieu, l'étude va privilégier la recherche des figures simples et identiques capables de paver l'ensemble du plan sans superposition et sans laisser de vides, ces figures ayant seulement en commun une frontière. : ce sont les **pavés.**



Pavé figuratif : ce seul pavé permet le pavage de tout le plan.



Pavage de type M.C Escher; remarquer que les mêmes oiseaux sont tête bèche.

Mauritz Cornelis Escher: un grand artiste et spécialiste du pavage.

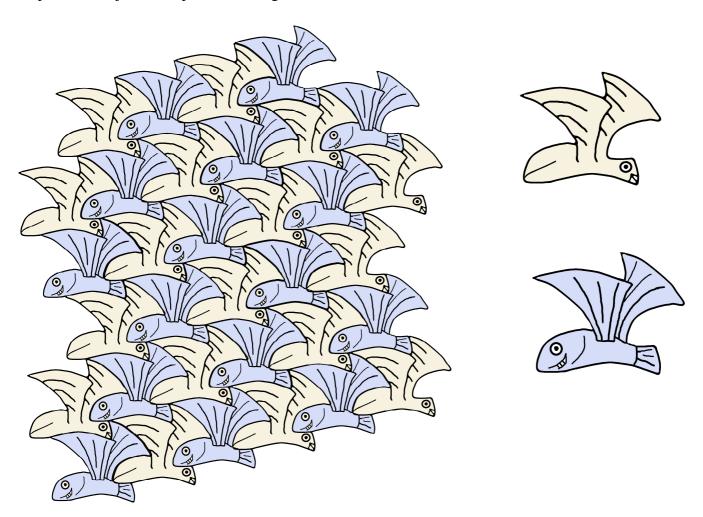
Mauritz Cornelis Escher est sans contexte celui qui a fait découvrir l'art du pavage. Graveur de talent, il été subjugué par la beauté et la complexité des arabesques Nasrides de l'Alhambra de Grenade, il a su en extirper la substantifique moelle pur nous présenter ses propres créations extraordinaires.

Sa rencontre avec l'art islamique, lors de son voyage en Andalousie, a profondément influencé son œuvre ; les pavages complexes de ce temple de l'arabesque géométrique utilisent les propriétés géométriques des transformations isométriques :

Les translations, Les rotations, Les symétries, Les rotations glissées.

C'est de ces murs, sols, et plafonds de ce palais qu'a jailli l'étincelle qui a permit à Escher de développer toute son inspiration pour nous faire parvenir ses pavages figuratifs, ses perspectives inhabituelles et ses jeux de lumière.

Nous allons essayer d'expliquer de la manière la plus simple possible comment construire un pavée figuratif ou non figuratif. Nous ne pouvons rien inventer dans ce domaine car tout a déjà été fait, par contre nous pouvons toujours interpréter à notre guise.

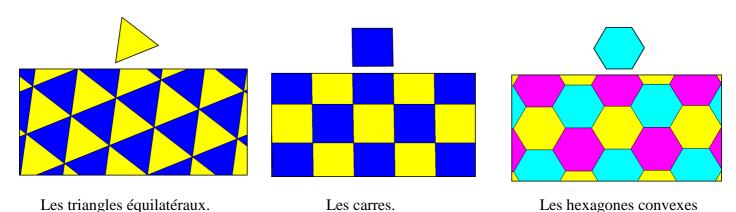


Un seul pavé a permit de faire ce pavage ; le même a servi pour l'oiseau et le poisson volant.

I. Pavages du plan:

a) Par des polygones réguliers :

Seulement trois familles de polygones **réguliers** peuvent paver le plan.

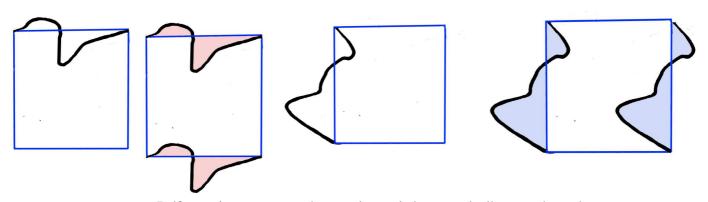


b) Déformations compensées :

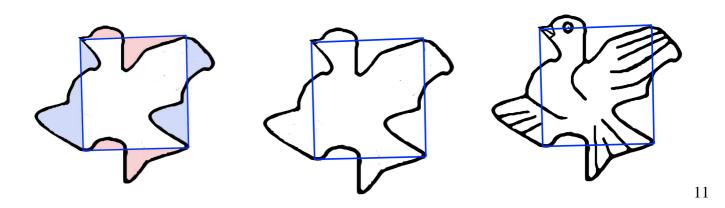
Ces polygones peuvent subir diverses déformations compensées à condition de respecter les règles suivantes :

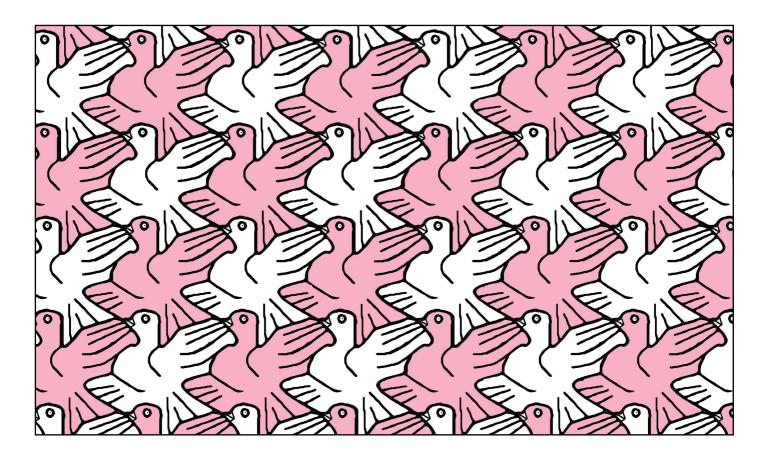
- Ne pas modifier la surface du pavé.
- Compenser sur un autre côté par une déformation isométrique afin de pouvoir ajuster les frontières entre deux pavés sans qu'ils se superposent.

• Exemple 1 : le carré.

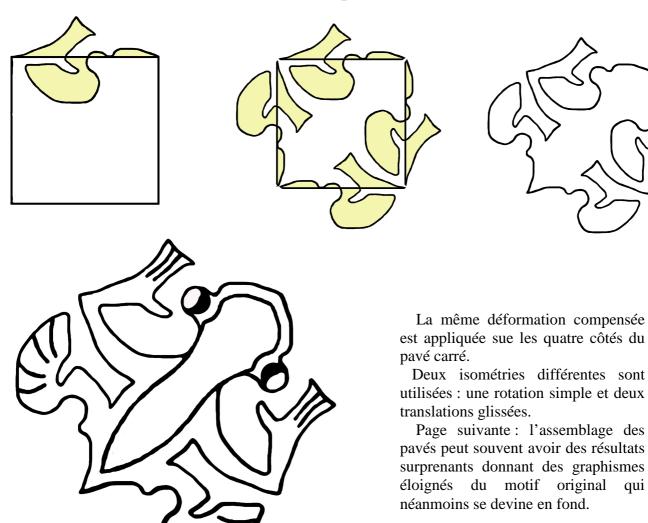


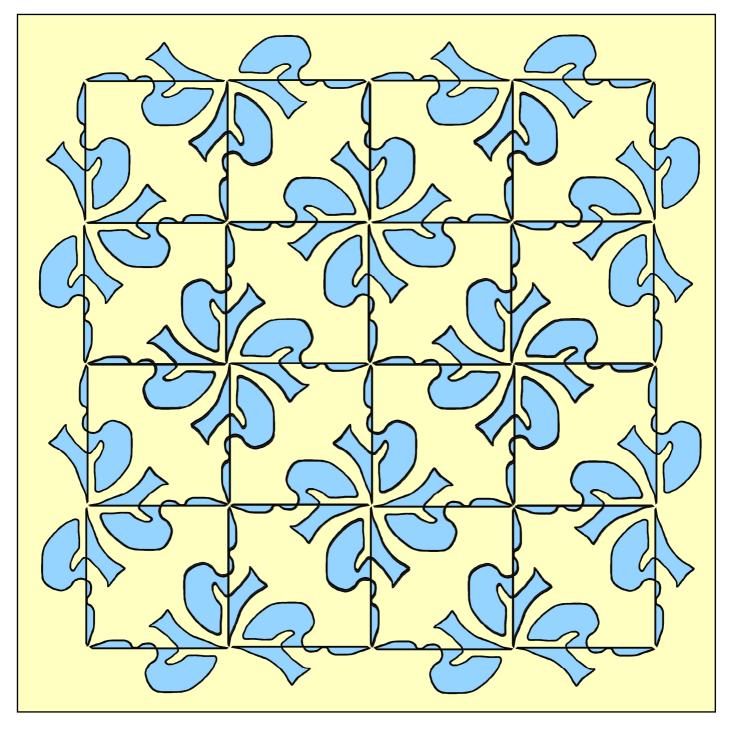
Déformations compensées sur deux côtés opposés d'un pavé carré. Le tracé est déplacé par translation.



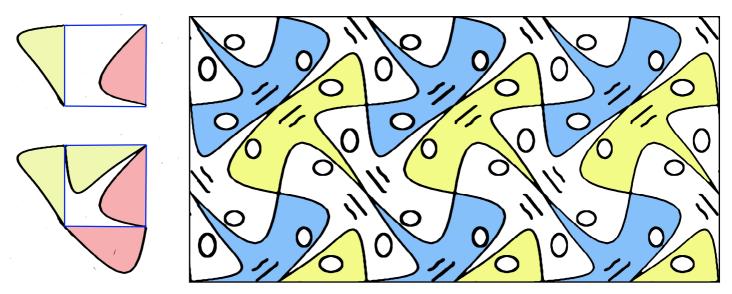


• Exemple 2 : le carré.

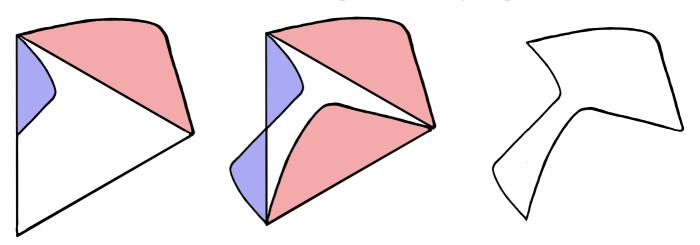




• Exemple 3 : le carré. Deux rotations glissées.

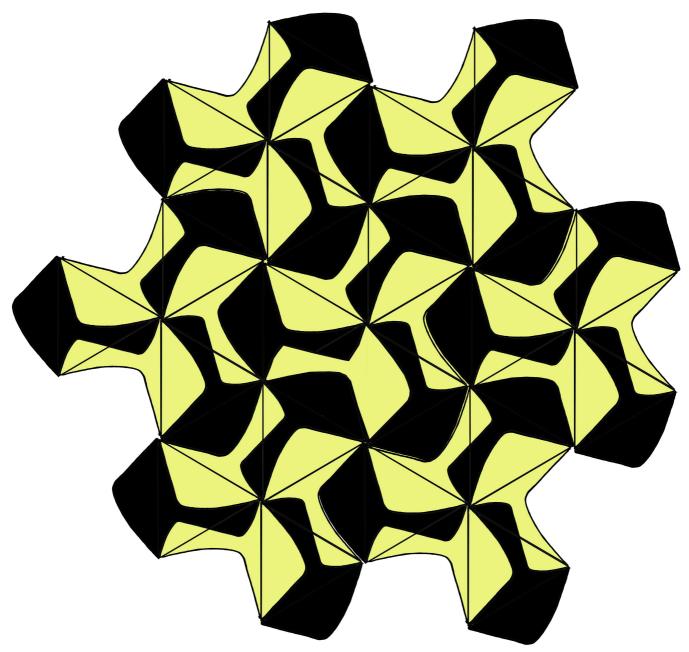


• Exemple 4 : le triangle équilatéral.

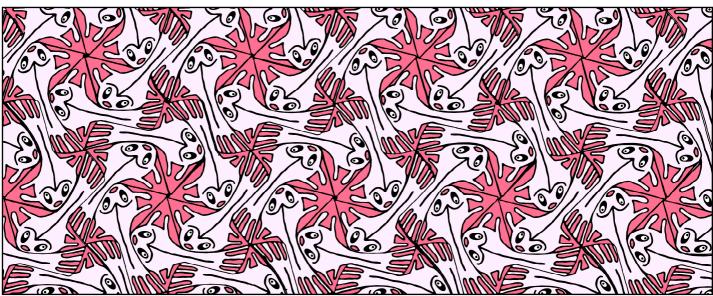


Pour ce pavage, deux isométries :

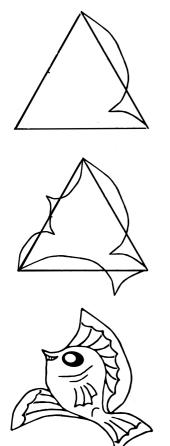
- en rose une rotation simple de 60° avec comme centre de rotation un sommet,
- en bleu une rotation de 180° avec comme centre de rotation le milieu du côté.

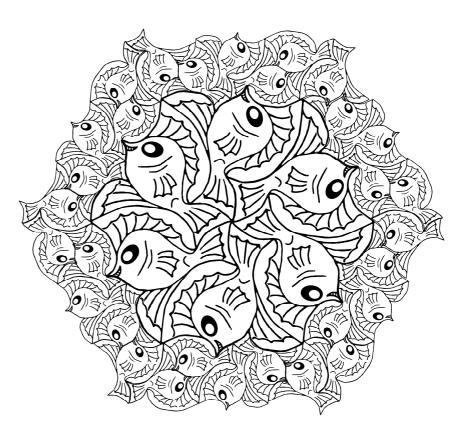




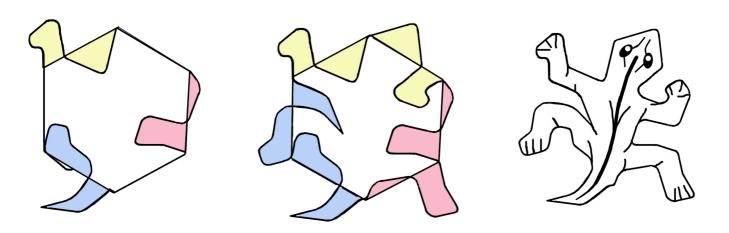


• Exemple 5 : le triangle équilatéral. Mêmes isométries.

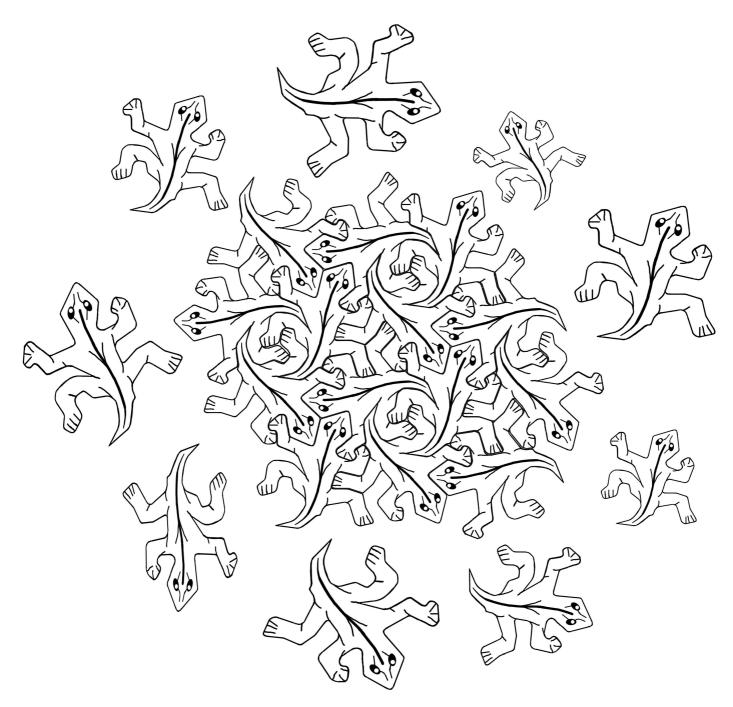




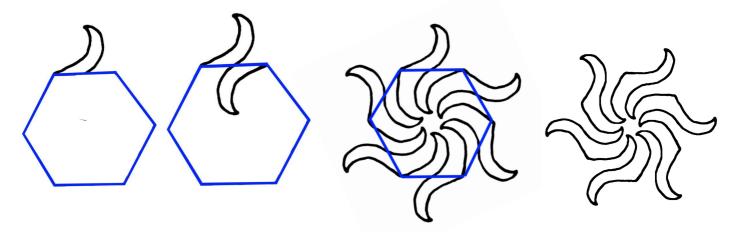
• Exemple 7 : l'hexagone.



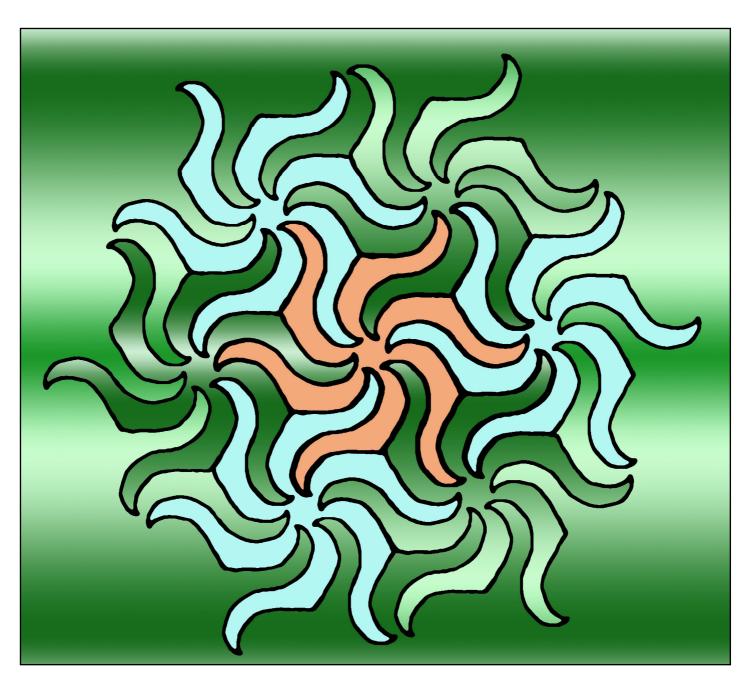
Une simple rotation de 120° sur la droite pour chaque tracé permet de dégager la silhouette du lézard.



• Exemple 7 : l'hexagone.



Tout d'abord, une symétrie centrale (ou une rotation de 180°) définit un côté. Cinq rotations glissées du coté précédemment défini permettent de terminer ce motif.

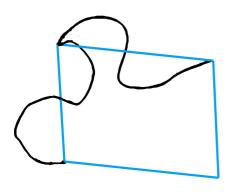


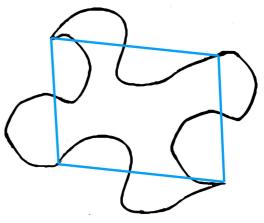
c) Les isométries :

Le rôle des isométries est de déplacer les déformations compensées pour quelles soient compatibles au pavage du plan sans laisser d'espace en ajustant les frontières entre les pavés.

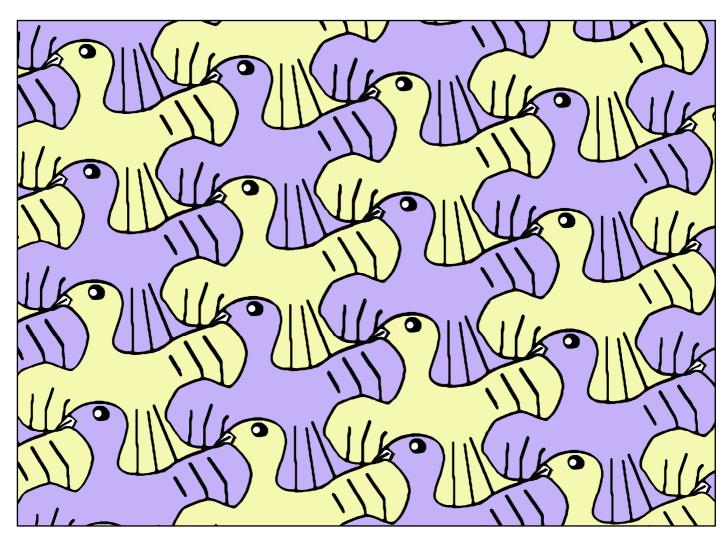
• La translation :

Conditions : au moins deux côtés du polygone doivent être parallèles et de même dimension ; c'est le cas pour les carrés et les hexagones.



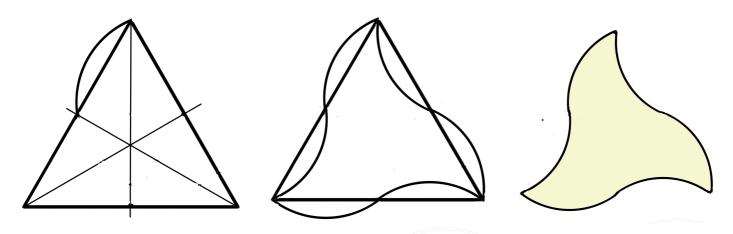


Deux translations concernant les côtés opposés.

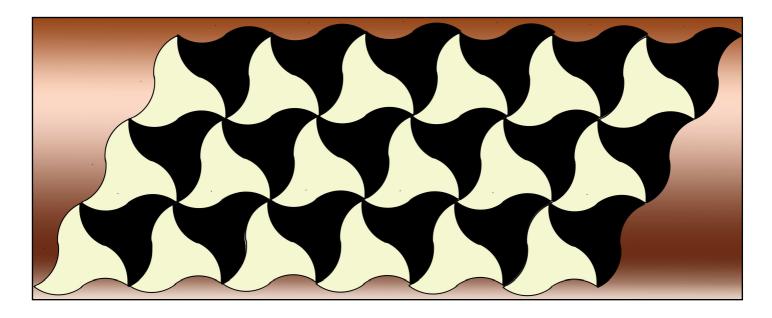


• La rotation :

Condition : le centre de rotation doit être situé sur la frontière ; il est placée en général sur un des sommets du polygone ; dans le cas de la symétrie centrale (rotation à 180°) il est placé au milieu d'un côté.

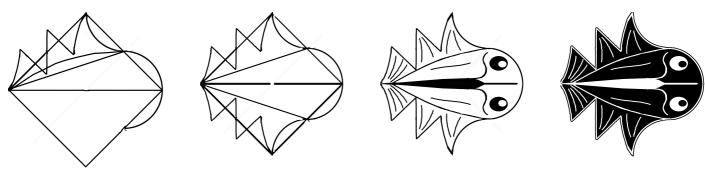


Une rotation de 180°, le centre de rotation est au centre du côté concerné, suivi de deux rotations successives de 60° chacune avec pour centre de rotation un sommet du triangle.

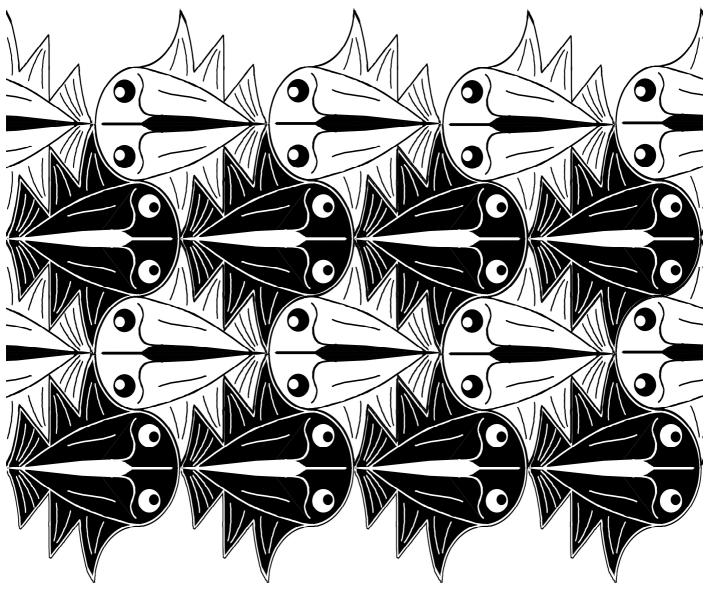


• La symétrie :

Condition : l'axe de symétrie doit être hors du polygone ou sur un de ses côtés.

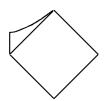


A partir du demi-carré, une symétrie axiale (rotation a 180°) sur chaque côté permet de tracer la demi figure. La diagonale de ce demi-carré servant d'axe de symétrie permet de tracer le reste.



La réflexion glissée :

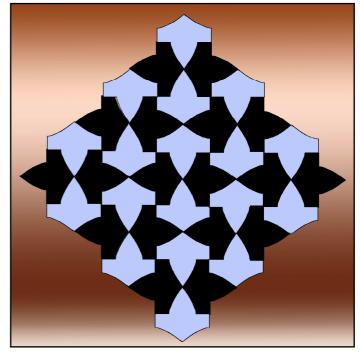
La réflexion glissée est un composante d'isométries : la translation glissée résultat d'une rotation et d'une translation ; la symétrie glissée résultat d'une symétrie, d'une rotation et d'une translation.







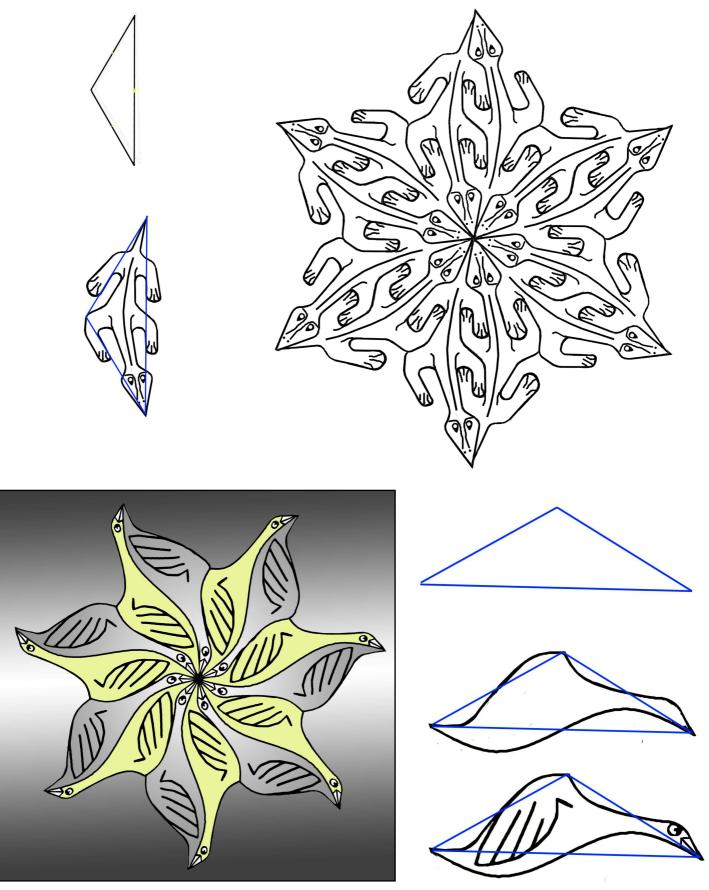
Une rotation de 90° (partie gauche) et deux réflexions glissées.

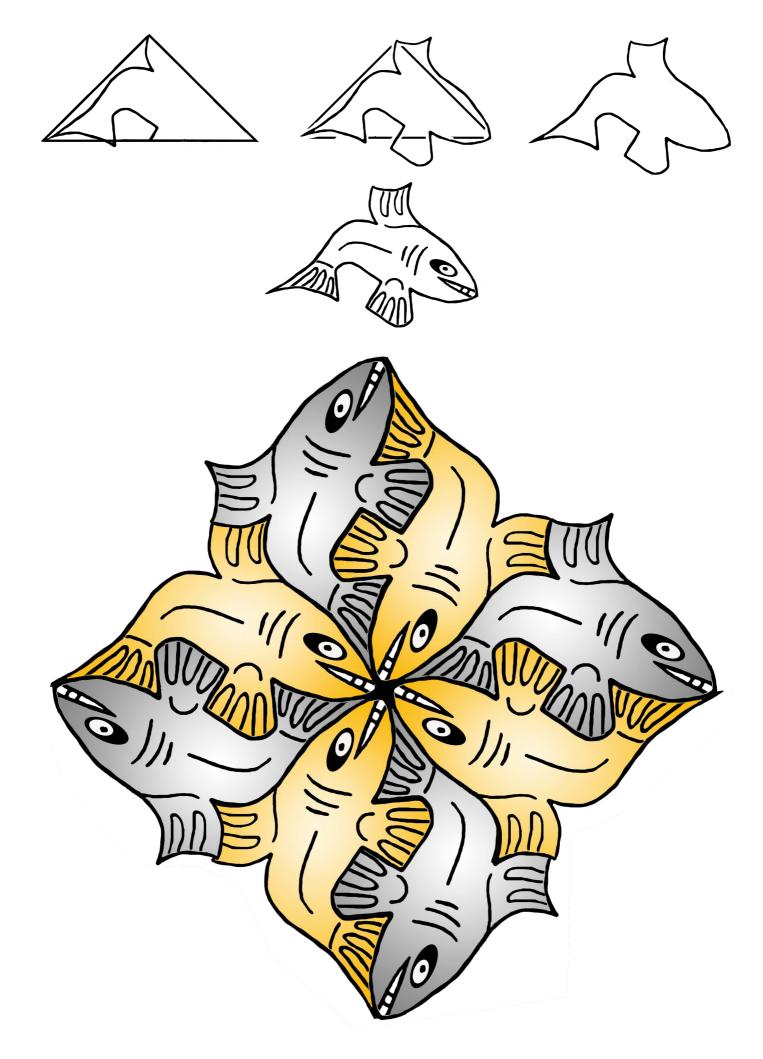


d) Pavage par des polygones irréguliers :

• Les triangles quelconques :

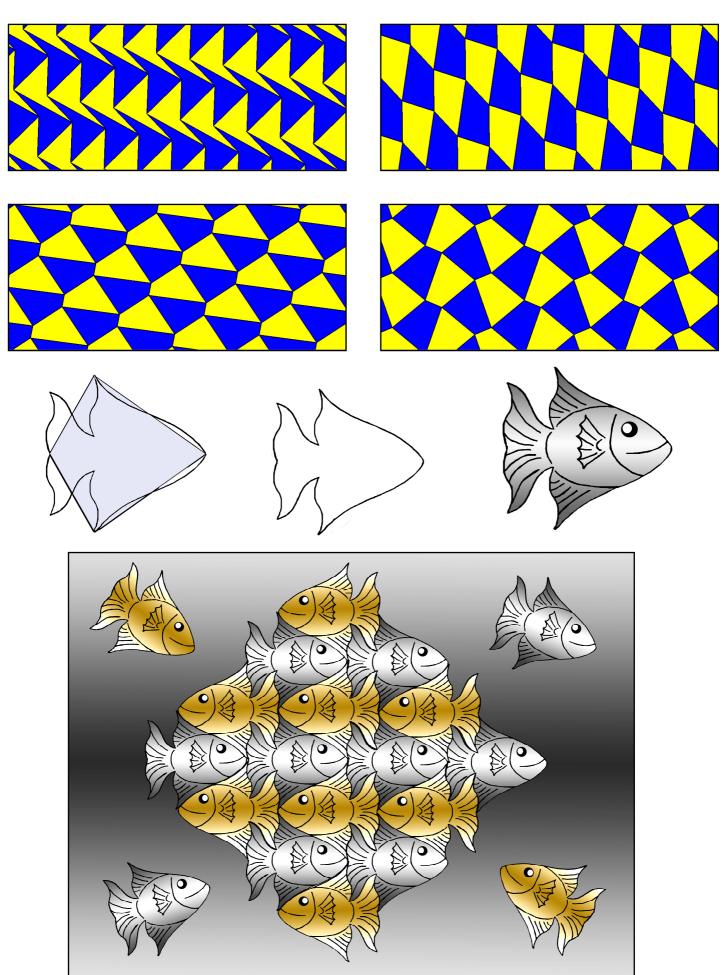
Tous les triangles pavent le plan : ci-dessous un lézard, une oie et un requin

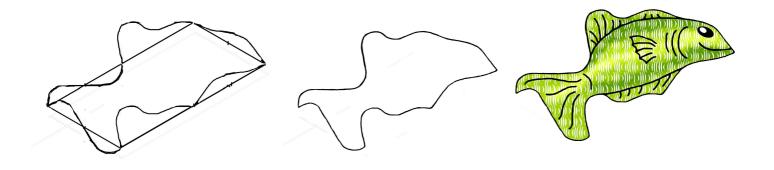


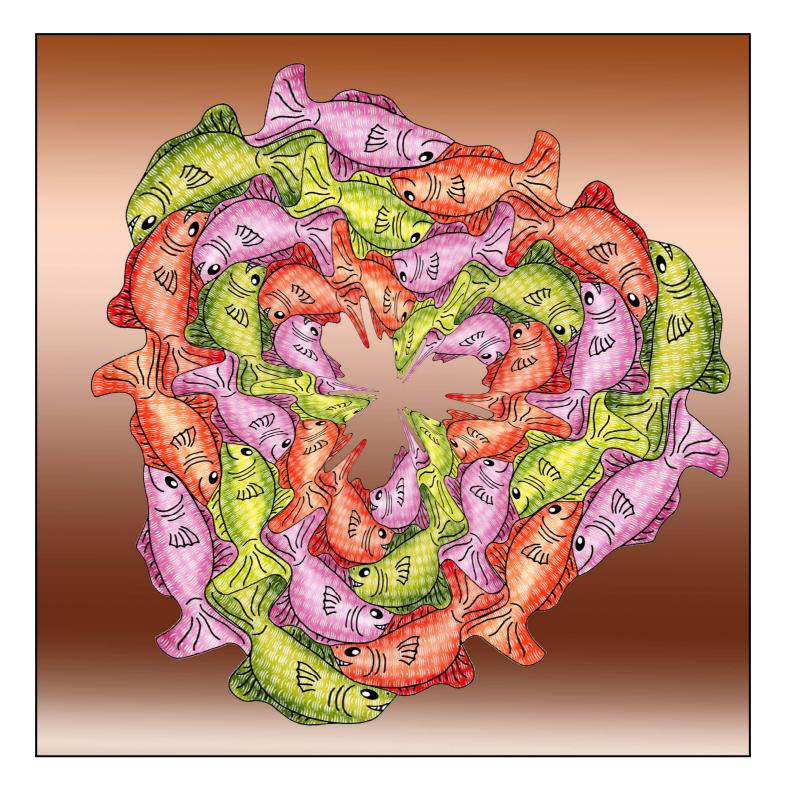


• Les quadrilatères :

Tous les quadrilatères pavent le plan.



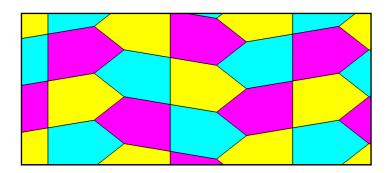


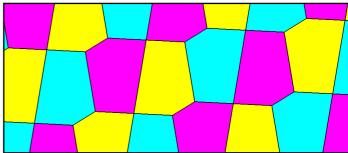


• Les pentagones :

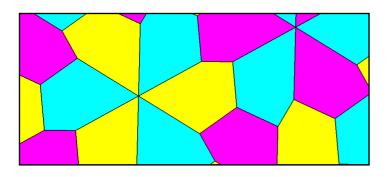
Les pentagones réguliers ne peuvent pas paver le plan; par contre certains pentagones irréguliers le peuvent. La recherche des propriétés (relations entre les côtés ou les angles) de ces pentagones est un véritable casse tête pour les mathématiciens, problème qui n'est pas encore résolu. Quand on croit avoir tout trouvé toutes les solutions il y a toujours un plaisantin qui en trouve une nouvelle. A ce jour, 15 solutions se présentent; à quand une nouvelle?

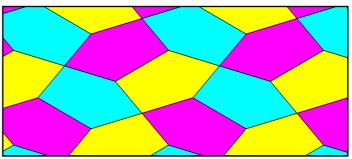
Voici quelques exemples :





Deux côtés opposés parallèles et isométriques.

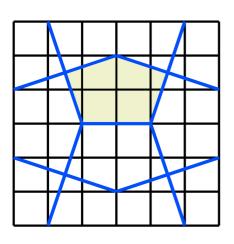


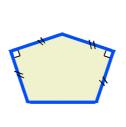


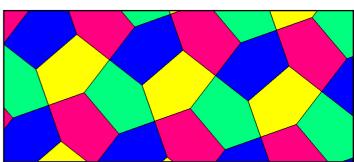
Côtés consécutifs isométriques deux à deux.

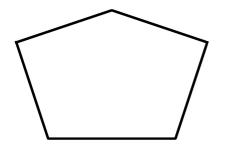
Côtés opposés isométriques deux à deux.

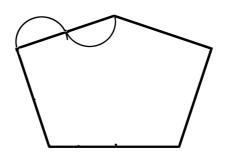
Et le célèbre pavé des trottoirs du Caire : quatre côtés consécutifs isométriques compris entre deux angles droits.

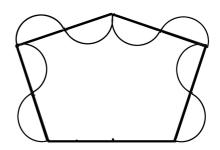




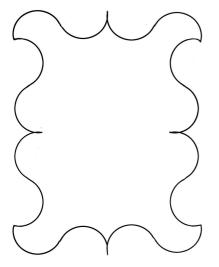






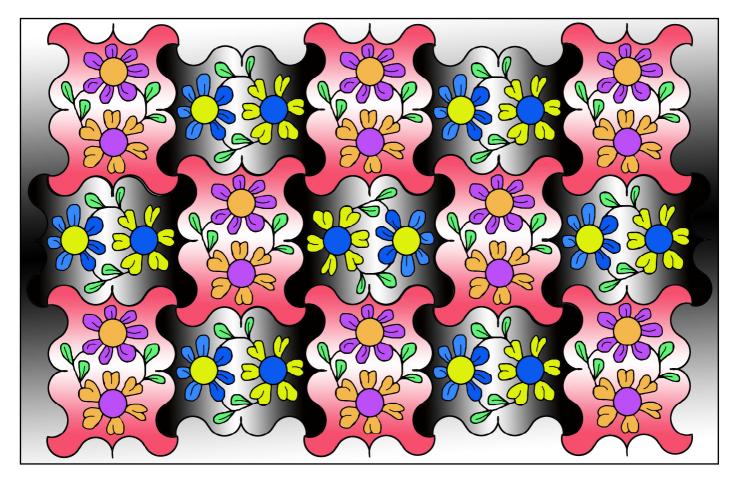


Pavage figuratif réalisé avec un pavé du Caire.



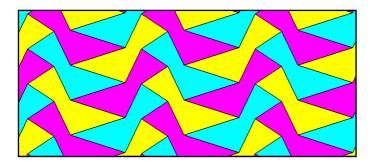




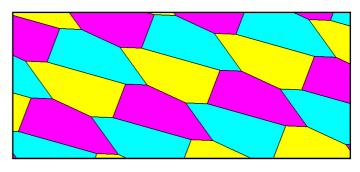


• Les hexagones :

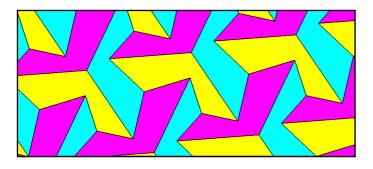
Selon la position des côtés parallèles ou isométriques mais aussi de la valeur des différents angles, le pavage avec un hexagone irrégulier est possible ; il existe de nombreuses possibilités : en voici quatre.



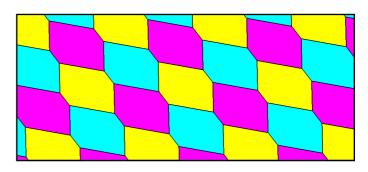
Deux cotés consécutifs isométriques deux à deux.



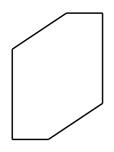
Deux côtés opposés parallèles et deux côtés opposés isométriques (pas les mêmes).

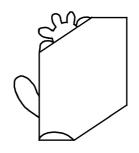


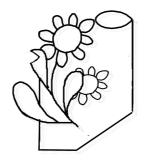
Quatre côtés consécutifs isométriques deux à deux.



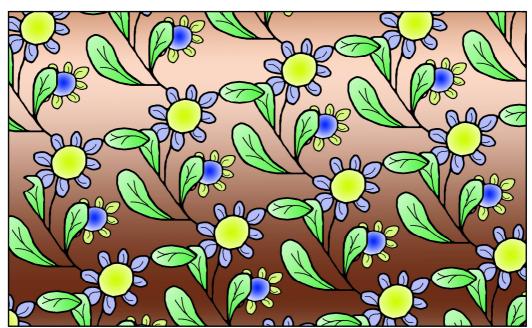
Les côtés opposés sont parallèles.







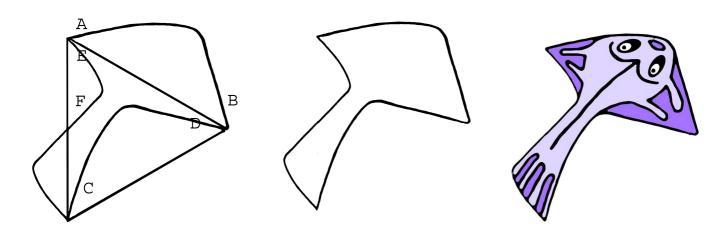




II. De l'infiniment grand à l'infiniment petit :

En partant du centre, quelle que soit la taille du motif (il peut être infiniment grand), le pavé diminue a chaque étage jusqu'à l'infiniment petit. Nous nous plaçons évidemment à une échelle correspondant à notre perception (il s'agit en fait de fractales).

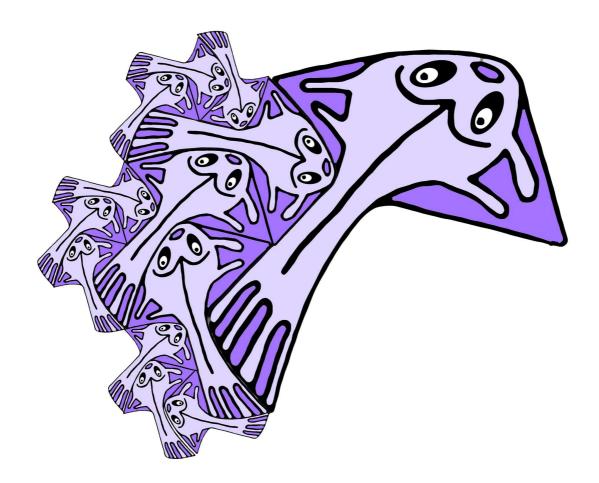
La construction du pavé obéit à des règles strictes néanmoins simples.



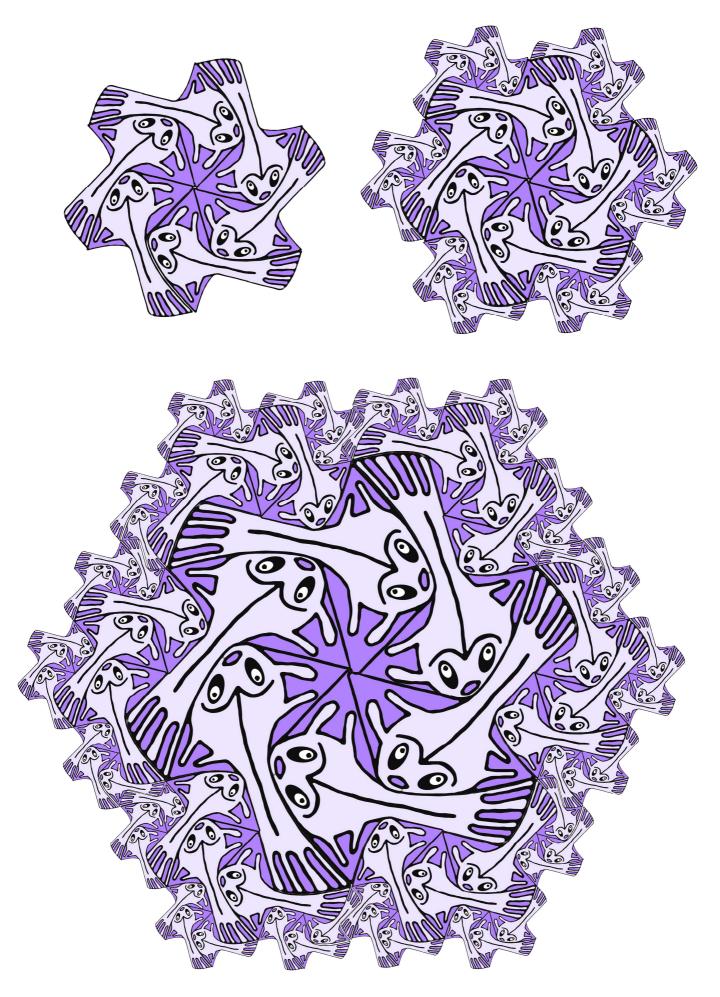
La courbe AB se retrouve en CD par une rotation à gauche de 60° .

La courbe AB, à l'échelle un demi se retrouve par une rotation à droite en EF. C'est ce changement d'échelle qui permettra d'accoler les demi-pavés.

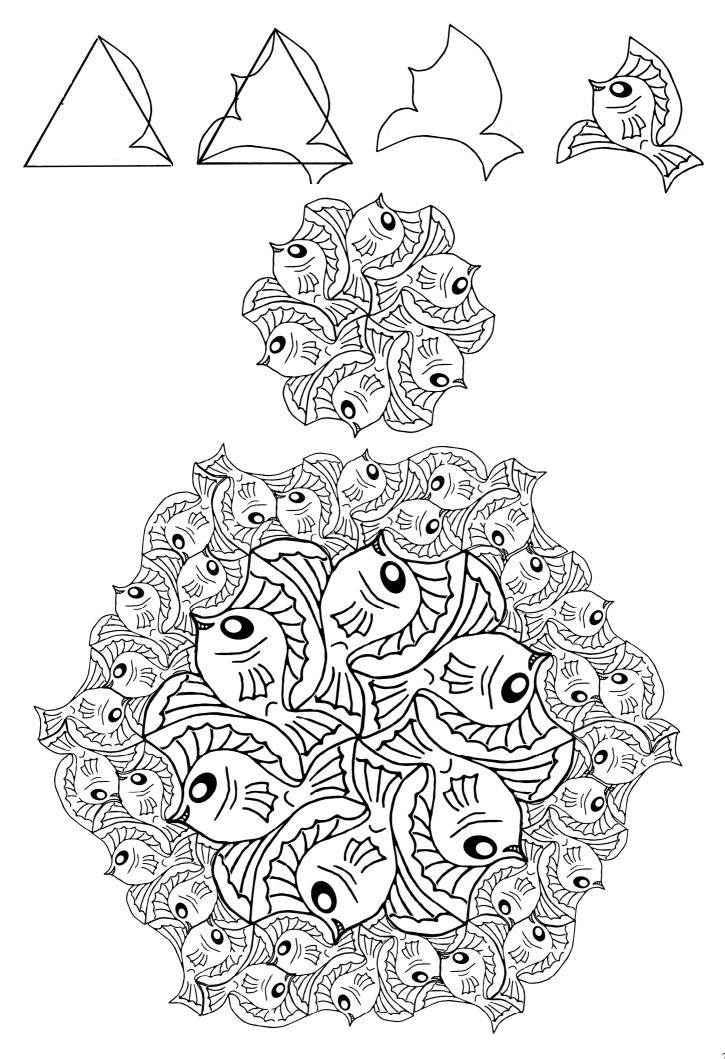
Une seconde rotation de 180° de EF permet de terminer le pavé.

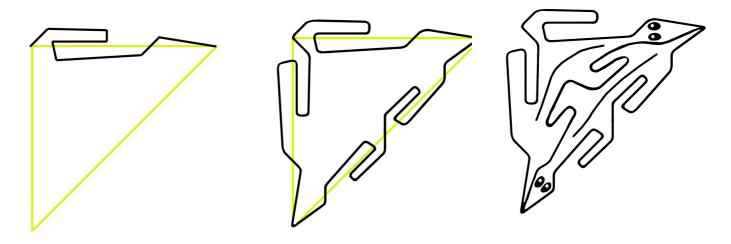


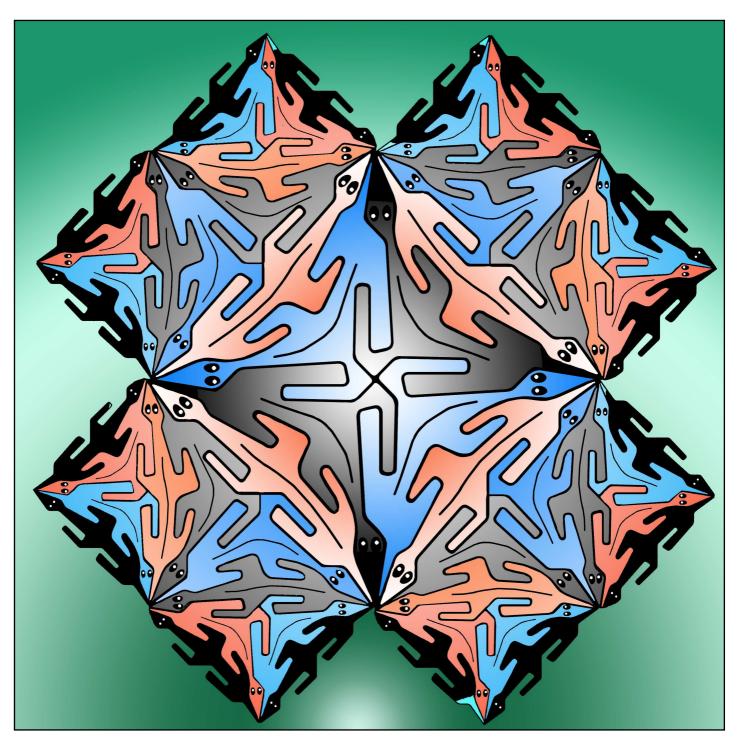
Les éléments du pavé peuvent ainsi diminuer ou augmenter de l'infiniment grand à l'infiniment petit.



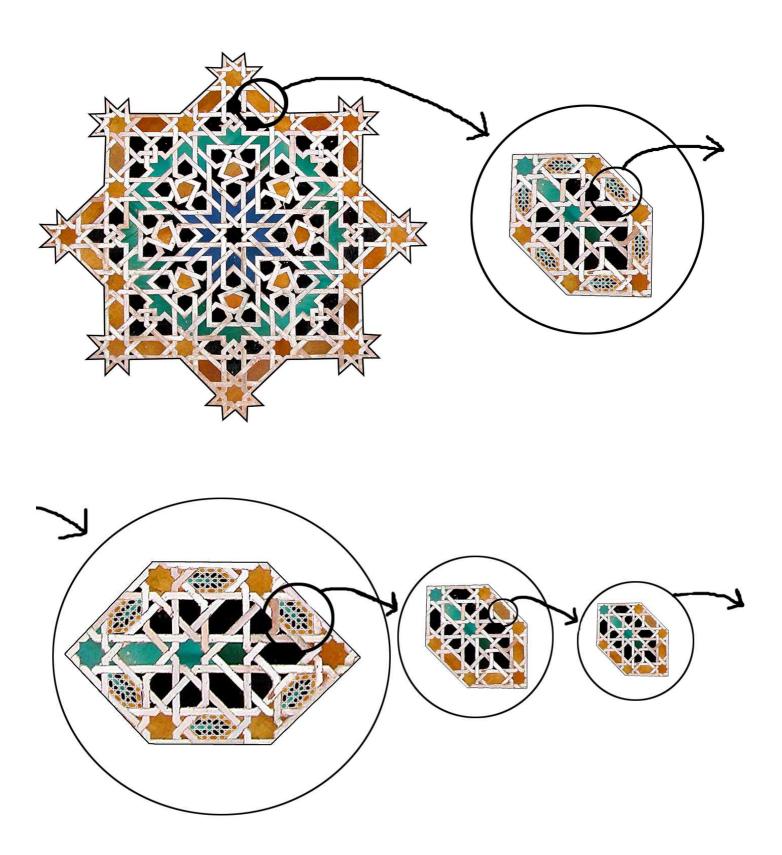
Trois étages de construction ; la limite de l'infiniment petit sera un hexagone convexe régulier.



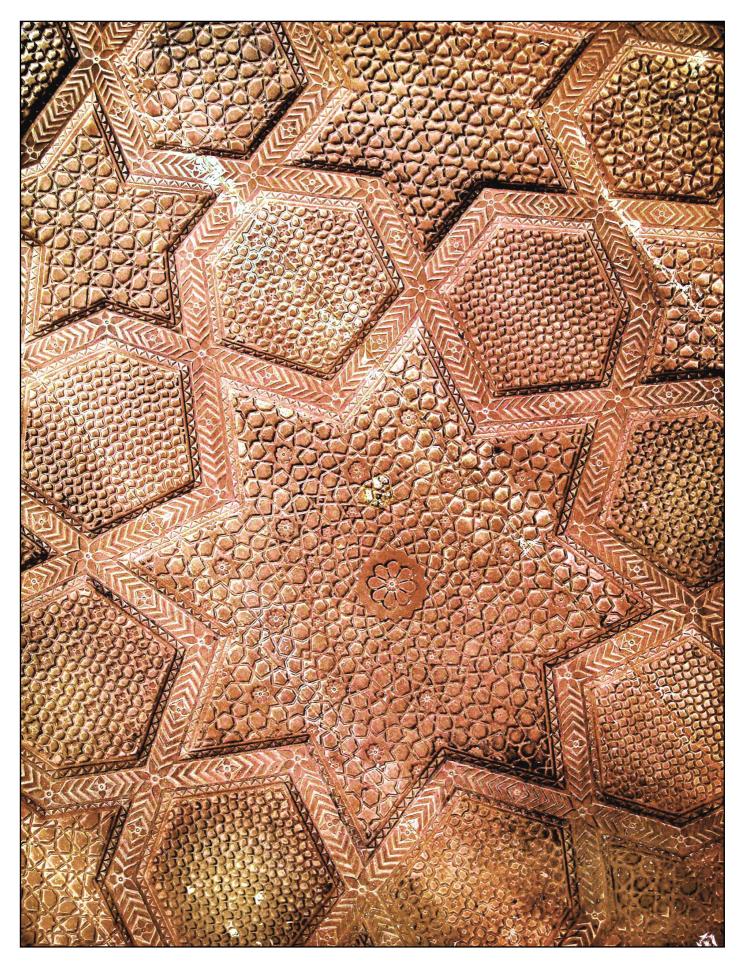




Cette approche de l'infini se retrouve aussi dans certains motifs d'arabesques : par exemple le saft de ce panneau de zelliges de l'Alhambra peut se conjuguer jusqu'à l'infini.



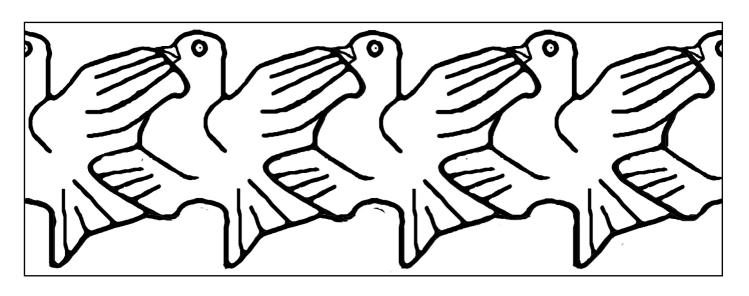
De même pour cette étoile de Fatehpur Sikri, elle-même formée de deux étages d'éléments ; on peut rajouter autant d'étages que l'on veut, cependant le résultat serait illisible (de même pour le saft précédent).

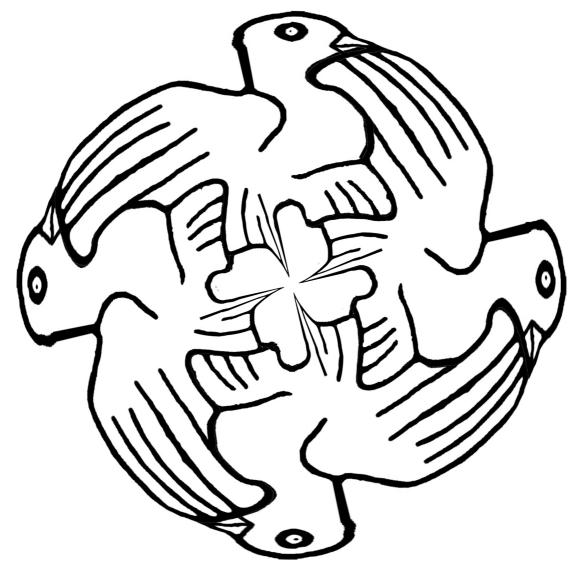


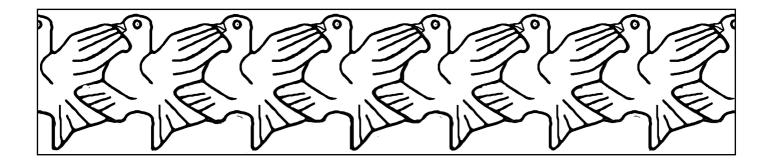
III. Déformations polaires :

Le côté mathématique de la géométrie polaire étant laissé de côté, seules les déformations polaires seront considérées. Le tripatouillage des coordonnées polaires nous permet, sous certaines conditions, de transformer un cercle en droite ; nous pouvons donc :

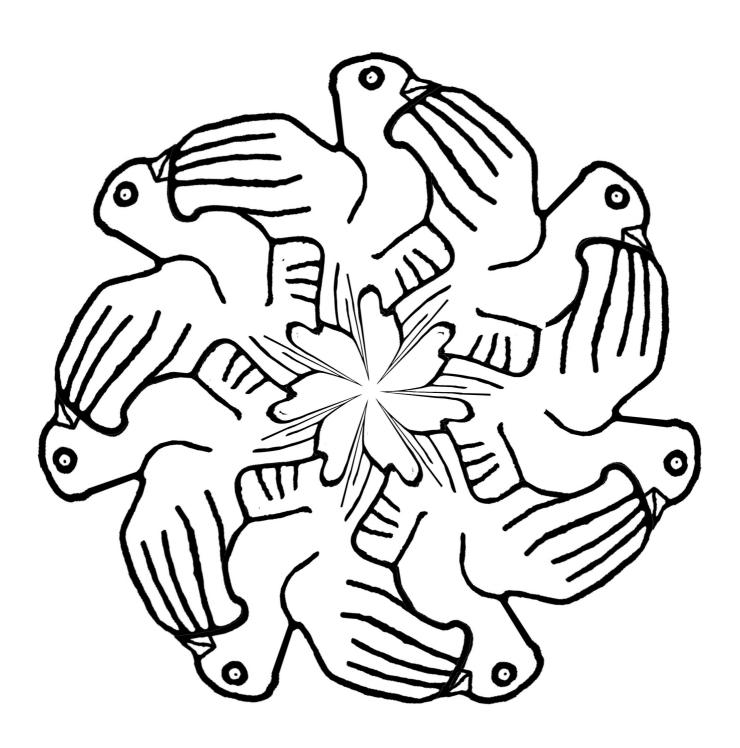
• Transformer une frise en rosace.

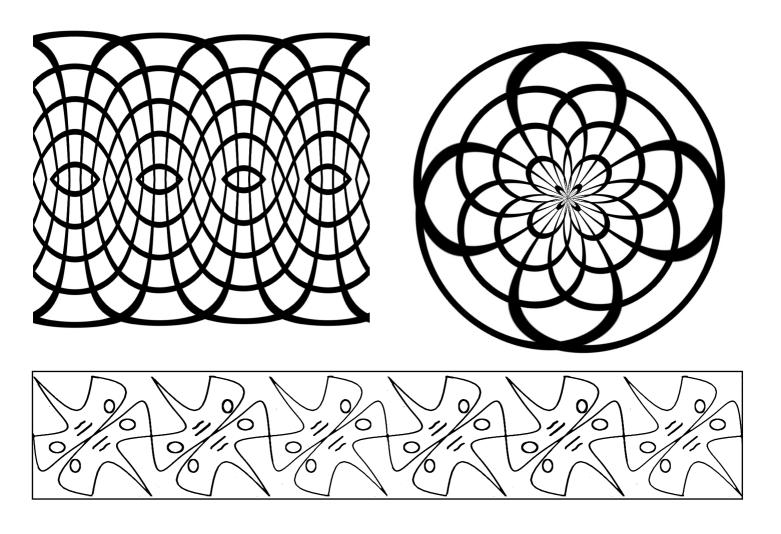


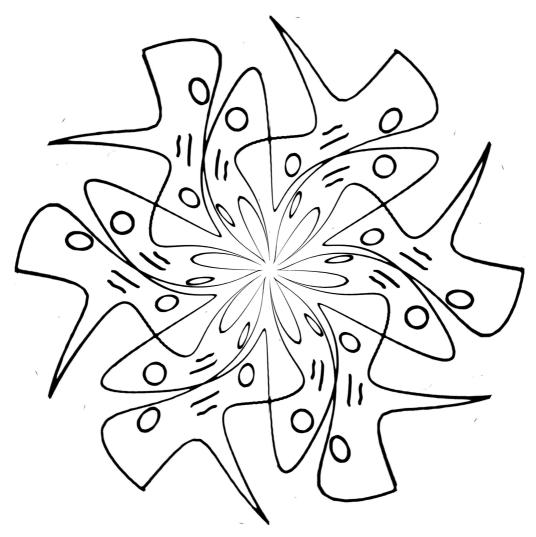


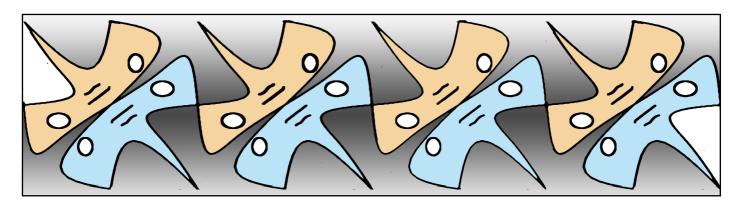


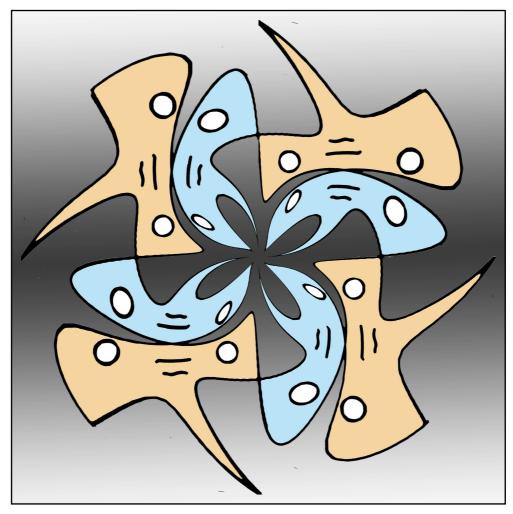
Ces frises d'oiseaux ont été transformées en rosace ; à noter que le nombre d'oiseaux détermine le nombre de branches de la rosace.



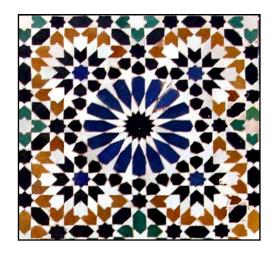


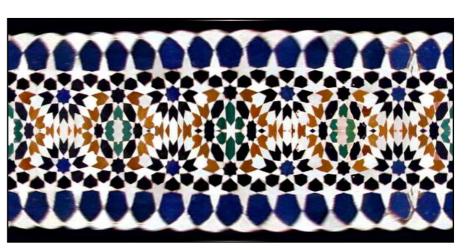






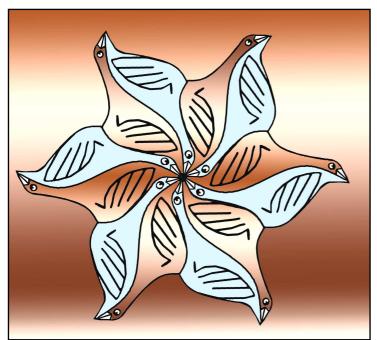
• Transformer une rosace en frise

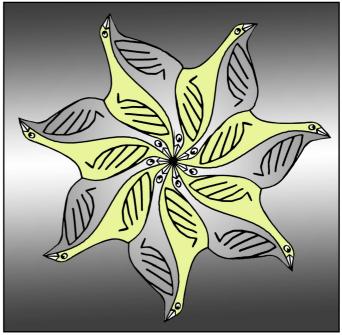


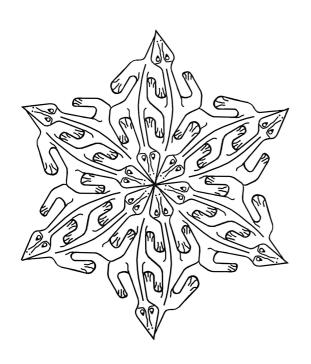


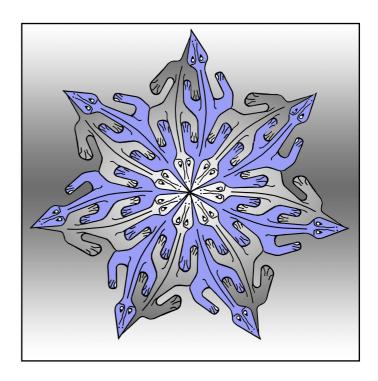
• Changer ainsi le nombre de branches d'une rosace

(Passer par exemple de 6 branches à 5 ou à 7 branches).

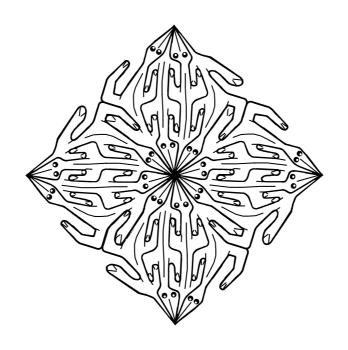


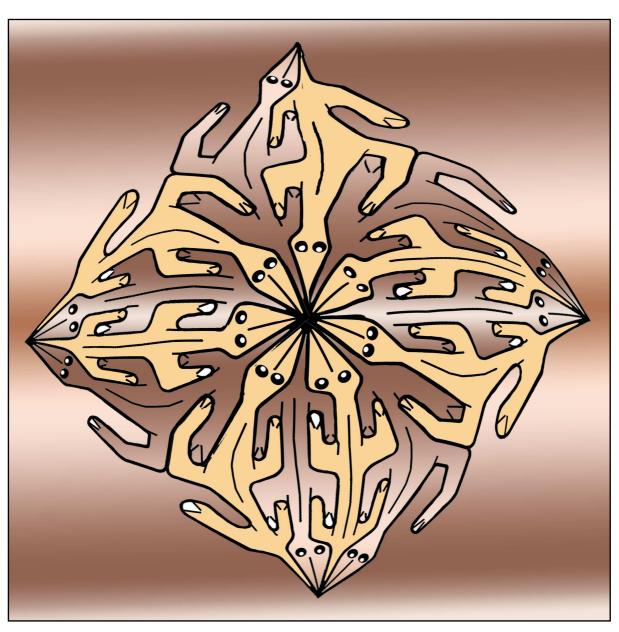






Au départ, 6 oies, tête au centre ; à l'arrivée, 7 oies, tête au centre. Idem avec les lézards.

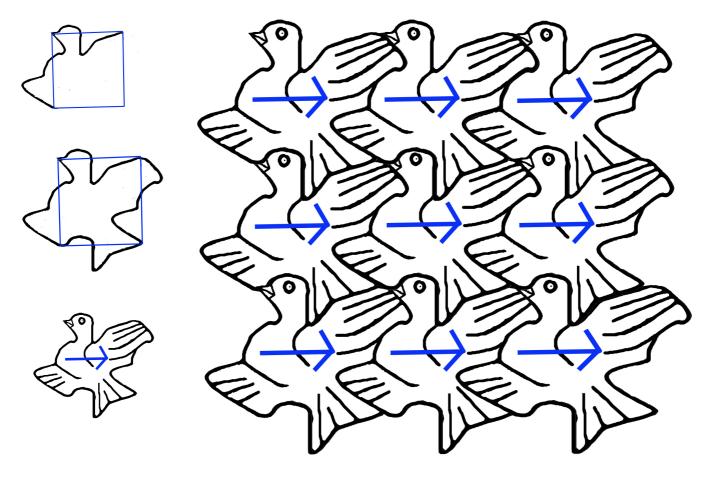




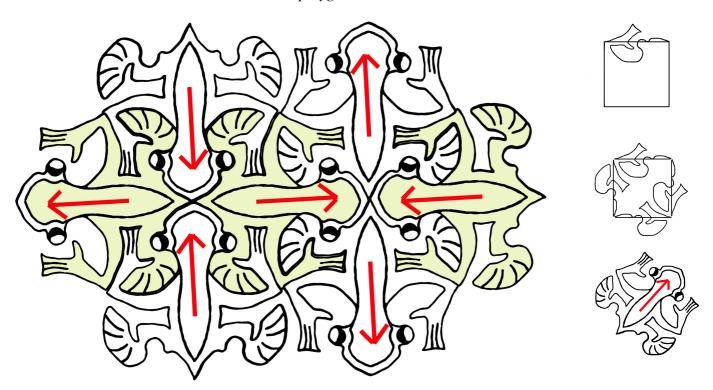
Au départ 8 lézards, tête au centre ; à l'arrivée, 7 lézards, tête au centre.

IV. association de pavés :

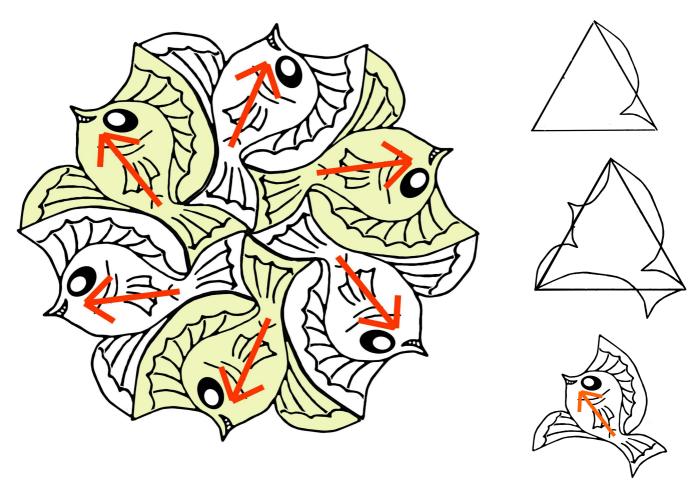
Selon le type de polygone et les isométries utilisées, les pavés s'emboitent différemment avec des orientations différentes ; en voici quelques une parmi les nombreuses possibilités :



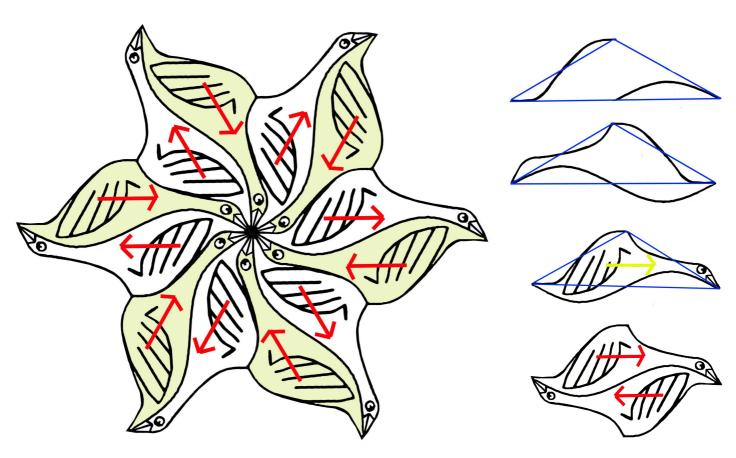
Une seule direction : le polygone est un carré ; deux translations utilisées.



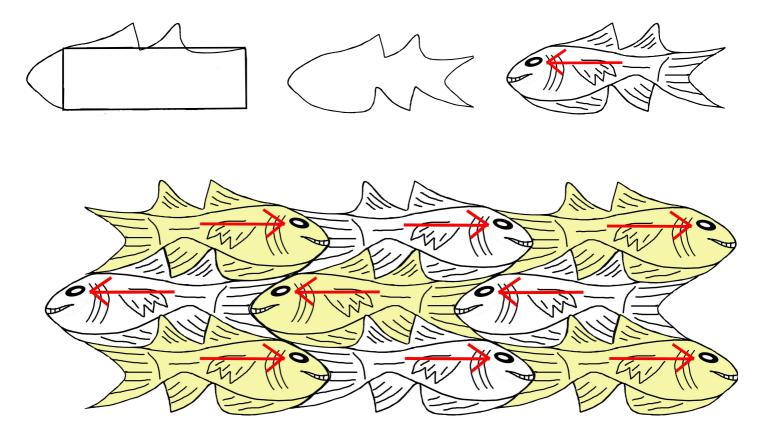
Quatre directions : le polygone est un carre ; une rotation et deux réflexions glissées.



Six directions : un triangle équilatéral, deux rotations utilisées.



 $Douze\ directions: un\ triangle\ isoc\`ele\ ;\ une\ rotation\ et\ une\ r\'eflexion\ gliss\'ee.$



Deux directions : un rectangle ; une translation et une réflexion glissée.

Remarques:

- Il arrive qu'un pavage soigneuse ment préparé ne marche pas. En effet, il existe des relations étroites entre les polygones et les isométries, malheureusement les mathématiciens ont démontré qu'il n'y a que 17 manières d'agencer les polygones et les isométries pour paver le plan. A vous de trouver les bonnes. Cependant, si on reste sur des polygones simples, ça marche presque a tout les coups.
- Pour ce qui est des transformations polaires, le logiciel PHOTOSHOP possède un filtre transformation plaire qui s'occupera de vos problèmes à condition que la finesse de votre travail n'excède pas 3000 / 3000 pixels. Toutes les illustrations et pavages de ce petit livre ont étés conçu avec ce logiciel. L'écriture et la mise en page sur WORD 2003.